前　　言

近三十年来，随机振动已日益成为一个重要的研究课题。随机振动与通常所说的确定性振动不同，其振动过程既不能预知，也不重复。对于随机振动，确定性的数学处理方法已经失效，必须用概率论和数理统计的方法加以研究。

当今科学技术的突飞猛进，赋予这个新课题以强大的生命力。一方面，由于现代机械和设备向着高速、高效、高精度的方向发展，要求进一步优化产品和缩短产品设计周期，按过去假定的确定性激励引起的振动进行分析，已远远不能满足要求，必须用随机振动理论来处理，才能更接近真实情况；另一方面，快速付里叶变换算法和电子计算机技术的应用，使数据分析速度在短短几年内提高了好几个量级，"实时"分析的愿望已经实现，为随机振动理论的实际应用创造了良好的条件。因此，随机振动这门学科，不仅越来越引起科技界的兴趣，越来越广泛地应用于诸如交通运输、结构抗震、噪声消除、宇宙航行、兵器装备、自动控制、资源勘探、信息分析处理等方面的研究，而且远远超出了通常的工程领域，渗入到经济、医疗、公安等部门。

必须而且可以按随机振动处理的问题主要有以下几种：

一、量大面广、经济效益显著的。

例如汽车、拖拉机、坦克、装甲车、工程机械等行走机械及船舰等在其行驶过程中，由于路面或海浪的随机激励，都会引起随机振动。其行驶速度常因机械本身或乘坐者不能承受过大的振动而难以提高。应用随机振动理论，设计优化的悬挂减振系统，将收到较大的经济效益，而且在国防上也有重要意义。此外，加工设备（如各种机床、冶金压延设备、造纸机械等）振动特性的合理选择，将大大提高工效和产品的精度，也属于这一类问题。

二、特别重要或昂贵的工程设备或产品，必须首次成功或保证安全可靠的

例如武器（导弹、枪、炮等）发射时受到环境随机振动的影响，但要求首发命中或及早命中；宇航设备（宇宙飞船、航天飞机、人造卫星等）在大气层中飞行时，受大气湍流作用而作随机振动，但要求其中的仪表和设备万无一失；原子能发电站、高压输电线、大型发电机等重要设备的破坏将造成重大事故，必须要求它们在强烈地震时仍能正常工作。

三、机理不清楚的。

如人体工程、生物工程中的脑电波、心电波，脉搏波动等，其作用机理不清，但在医疗中可根据其功率谱的异常变化诊断疾病；又如齿轮箱、滚珠轴承等发出噪声的机械在运转过程中的故障诊断、监察，损坏前的信息预报；再如控制机构的操纵性、灵敏度等等。

要用随机振动理论解决问题，往往会遇到较多的概念，要求有较广的知识面，涉及到理论力学、材料力学、概率论、机械振动、动态测试方法与技术以及有关方面的专业知识，这常使初学者感到困难。作者试图通过本书，使读者简略地重温随机振动理论的基本结论和描述随机振动的各域信息的物理意义及其在工程上的应用，而重点在于提高解决随机振动问题的能力。

本书的许多素材来源于国内几次随机振动讲习班的讲稿、学术交流会的论文、研究生教学中积累的资料以及广大科技工作者提供的典型材料。许多例题是根据这些素材自行设计的，融合了作者多年来在这方面探索中的点滴心得体会；部分例题和习题，是参考国外有关著作、论文，再经选择和改造的。例题和习题力求结合工程实际；解题过程力求条理清晰、繁简得当；例题中还考虑到一题多解的情况，或附有讨论，以开拓眼界；习题均经精心选择，通常是典型的理论与实际相联系的问题，旨在使读者得到基本训练。掌握了例题中的要领，对于求解习题和科研中的问

题，将有不小的帮助。

全书共有九章，第一章介绍了随机振动问题求解中常用的付里叶变换、拉普拉斯变换、Z变换、沃尔什变换等方法。第二至第四章介绍随机变量在四个域（时域、幅域、时差域、频域）的描述方法。第五章以后着重于随机振动理论的实际应用，如系统动态特性的识别、线性时不变系统响应的计算，使用寿命的设计、信号处理技术等，还涉及到工程上颇感棘手的非线性随机振动问题。为便于读者学习和解题时查找，书末备有八个附录。

本书的题目曾由研究生傅博、葛森、高瞻、谭明安通过练习的形式作了校对。

由于作者水平所限，本书的缺点和错误在所难免，如蒙读者批评指正，将不胜感激。

作者

于浙江大学

目 录

第一章 变换方法 …………………………………………………… (1)

一、内容提要 …………………………………………………… (2)

1. 付里叶级数 …………………………………………………… (2)

2. 付里叶变换 …………………………………………………… (2)

3. 拉普拉斯变换 …………………………………………………… (3)

4. Z变换 …………………………………………………… (4)

5. 沃尔什变换 …………………………………………………… (5)

6. 用变换方法求解问题的步骤 …………………………………… (5)

二、例题 …………………………………………………… (5)

第一章习题 …………………………………………………… (47)

第二章 随机变量幅域和时域的描述以及可靠性设计 …… (53)

一、内容提要 …………………………………………………… (54)

1. 幅域的描述 …………………………………………………… (54)

2. 时域的描述 …………………………………………………… (56)

3. 概率特征值的计算方法 …………………………………… (58)

4. 随机变量的代数运算 …………………………………… (58)

5. 可靠性设计及其准则 …………………………………… (60)

二、例题 …………………………………………………… (60)

第二章习题 …………………………………………………… (101)

第三章 回归方法与相关分析 …………………………………… (109)

一、内容提要 …………………………………………………… (110)

1. 直线回归方程 …………………………………………………… (110)

2. 自相关函数 …………………………………………………… (110)

3. 互相关函数 …………………………………………………… (111)

4. 计算相关函数的步骤 …………………………………… (112)

二、例题 …………………………………………………… (113)

第三章习题 …………………………………………………………… (138)
第四章 频率分析与谱密度 ……………………………………… (145)
一、内容提要 ………………………………………………………… (145)
1. 自功率谱密度函数 ………………………………………………… (145)
2. 互谱密度函数 ……………………………………………………… (146)
二、例题 ……………………………………………………………… (146)
第四章习题 …………………………………………………………… (173)
第五章 振动系统动态特性的描述 …………………………… (176)
一、内容提要 ………………………………………………………… (176)
1. 频率响应函数 ……………………………………………………… (176)
2. 脉冲响应函数 ……………………………………………………… (177)
二、例题 ……………………………………………………………… (178)
第五章习题 …………………………………………………………… (208)
第六章 受平稳随机激励的线性时不变系统之响应计算
…………………………………………………………… (216)
一、内容提要 ………………………………………………………… (217)
1. 响应信息间的关系 ………………………………………………… (217)
2. 单输入单输出系统 ………………………………………………… (217)
3. 多输入多输出系统 ………………………………………………… (219)
4. 计算响应的步骤 …………………………………………………… (222)
二、例题 ……………………………………………………………… (222)
第六章习题 …………………………………………………………… (276)
第七章 损坏理论 ……………………………………………… (287)
一、内容提要 ………………………………………………………… (287)
1. 可靠度概念 ………………………………………………………… (287)
2. 损坏的两种类型 …………………………………………………… (288)
3. 平稳、正态、窄带随机过程在幅域中的概率特征 ……………… (288)
二、例题 ……………………………………………………………… (289)
第七章习题 …………………………………………………………… (301)
第八章 非线性随机振动 ……………………………………… (304)

一、内容提要 …… (305)
1. FPK法 …… (305)
2. 统计线性化方法 …… (306)
3. 摄动法(小参数法) …… (307)
二、例题 …… (307)
第八章习题 …… (338)
第九章 随机振动理论与信号处理技术相结合的工程问题 …… (343)
一、内容提要 …… (344)
1. 信号处理与信息的各域描述 …… (344)
2. 平稳随机过程各域信息间的一些关系 …… (345)
二、实例分析 …… (346)
第九章习题 …… (384)
附录1 Z变换特性和Z变换表 …… (387)
附录2 按序数排列的一组沃尔什函数 …… (389)
附录3 典型信号的自相关函数、自功率谱函数、概率密度函数和累积概率分布函数的示意图 …… (390)
附录4 累积概率值和安全概率值 …… (392)
附录5 人体机械振动模型及各部分的固有频率 …… (393)
附录6 人体感受曲线 …… (394)
附录7 单自由度系统的增益因子$|H(\omega)|$ …… (396)
附录8 詹姆斯公式表 …… (396)

第一章 变换方法

在研究随机振动问题时，变换是常用的手段，它可以简化数学关系并使解法简单和更有规律性，或者将时域函数变为各不同域内的信息函数，获得更多有用的信息，更全面、深刻地提供分析振动问题的识别资料。

变换的种类很多，如：对数变换、付里叶变换、拉普拉斯变换、Z变换、沃尔什变换等等。

以付里叶变换来说，在随机振动中，时域信号经过付里叶变换，就得到频域函数；时差域的相关函数经过付里叶变换，就得到频域的谱密度；描述振动系统动态特性时，时域的脉冲响应函数经过付里叶变换，就得到频率响应函数；在振动信号处理技术中，时域的截断函数经过付里叶变换，就得到频域的谱窗函数，等等。

以拉普拉斯变换来说，它可以将求解振动微分方程的运算变换为在复平面内求解代数方程的问题，从而可以十分方便地用代数方法或图解方法获得系统的动态特性：如传递函数、动刚度、动柔度等。

以Z变换来说，在振动信号处理技术中，时域的离散信号经过Z变换，就得到复平面内的连续函数。对于激励或响应以序列形式表示的振动问题，将描述激励、系统和响应三者关系的差分方程进行Z变换，即可非常方便地从解连续函数的代数运算中，获得系统动态特性（如传递函数）和响应。

以沃尔什变换来说，它把一个时域振动信号分解为各个沃尔什波（幅值在－1到＋1之间的矩形波）的组合，得到二进制的序率数域的连续函数。显然，每个沃尔什波当然也是一组正弦波的组合。所以沃尔什变换归根到底也很象付里叶变换

一、内容提要

1. 付里叶级数

设 $f(t)$是时域的周期函数，其周期为T，则存在付里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

或

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n),$$

式中，$\omega_0=2\pi/T$ 是基频，n 为正整数，

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt,$$

$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$，为一周期内的平均值。

上述各式中的积分域，也可以是$-\frac{T}{2}$到$\frac{T}{2}$；

$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，c_n 与频率 $n\omega$ 的关系图表示各谐波振幅与各倍频率之间的关系，称为**振幅离散谱**；

$\varphi_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_n}{a_n}$，$\varphi_n$ 与频率 $n\omega$的关系图表示各谐波相位与各倍频率之间的关系，称为**相位离散谱**。

2. 付里叶变换

设$f(t)$为时域的非周期函数（习惯上又称**波形**或**时间历程**），且满足存在付里叶变换的收敛条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$，则有付

里叶变换对：

$$\begin{cases} F(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \\ f(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \end{cases}$$

式中 $F(\omega)$是频域的复函数，也可记作：

$$F(\omega)=A(\omega)+iB(\omega)=|F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)},$$

这里 $A(\omega)$，$B(\omega)$ 是 ω 的实函数。$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$.

$|F(\omega)|$，$\varphi(\omega)$，$A(\omega)$，$B(\omega)$分别称为幅频函数，相频函数，实频函数和虚频函数.

要完整地描述复函数 $F(\omega)$，可绘出$|F(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$，或 $A(\omega)$和 $B(\omega)$随 ω 变化的曲线，它们分别称为幅频、相频、实频、虚频特性曲线。另外，以 ω 为参变量，可用复平面上的一个点同时表示上述四个函数值，这些点连成的曲线称为**幅相频率特性曲线**，即著名的**奈奎斯特图**，又称**矢端图**。

若不用圆频率记号 ω，而用频率记号 f（单位赫兹）表示，则付里叶变换对成为：

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt,$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{i2\pi ft}df.$$

3．拉普拉斯变换

设 $f(t)$为时域函数，且 $t<0$ 时，$f(t)=0$，则存在拉普拉斯变换对：

$$\begin{cases} \mathscr{L}[f(t)]=F(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \\ \mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(\beta-i\omega)}^{(\beta+i\omega)} F(s)e^{st}ds=f(t), \end{cases}$$

式中，$\mathscr{L}$ 为拉普拉斯变换记号，

$\mathscr{L}^{-1}$ 为逆拉普拉斯变换记号，

$S=\beta+i\omega$ 是复数，实部为 β，虚部就是圆频率 ω，

$F(s)$是复函数。

在实际运算中，通常不必计算具体函数的正、逆拉普拉斯变换，有关书上均有专门的表可查。

在振动问题中，若输出和输入过程分别用 $y[t]$ 和 $x[t]$ 来表示，则两者拉普拉斯变换之比定义为传递函数 $H(s)$，即

$$H(s)=\frac{\mathscr{L}[y[t]]}{\mathscr{L}[x[t]]}=\frac{\text{输出的拉普拉斯变换}}{\text{输入的拉普拉斯变换}}.$$

在输入是力、输出是位移时，$H(s)$ 的倒数定义为动刚度 $K(s)$：

$$K(s)=\frac{1}{H(s)}=\frac{\mathscr{L}[x(t)]}{\mathscr{L}[y(t)]}=\frac{\text{力输入的拉普拉斯变换}}{\text{位移输出的拉普拉斯变换}}.$$

传递函数和动刚度都是复函数。

4、Z变换

设序列为 f_n，它的Z变换对为

$$\begin{cases}\mathscr{Z}[f_n]=F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n z^{-n}\\ \mathscr{Z}^{-1}[F(z)]=f_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c z^{n-1}F(z)dz\end{cases}\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

式中，$\mathscr{Z}$是Z变换记号，

$\mathscr{Z}^{-1}$是逆Z变换记号，

z是复数，实部为 β，虚部为 ω，

n是序数，

$F(z)$是复函数，

c是积分回线，它围住 $F(z)$的所有奇点。

Z变换的运算性质，在有关书上有专门的表格说明。

Z变换和付里叶变换都可看作拉普拉斯变换的特殊情况，Z变换是等时间步长离散后的拉普拉斯变换，而付里叶变换是当复数 s 的实部为零时的拉普拉斯变换。

5．沃尔什变换

若 $f(t)$ 为可积函数，则可用沃尔什变换对表示为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)\mathrm{WAL}(k,t),$$

$$F(k)=\int_0^1 f(t)\mathrm{WAL}(k,t)dt,$$

式中，k 为跨过零的次数，

$F(k)$ 为跨越次数域的函数，

WAL 是沃尔什波的记号。

6．用变换方法求解问题的步骤

（1） 把原始问题变换成简易的问题，

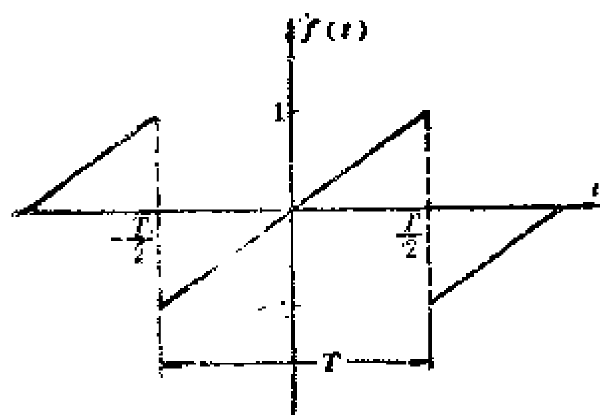
（2） 在变换域中解出较简易的问题，

（3） 对此解进行反变换，把变换域中的解还原到原始域中的解。

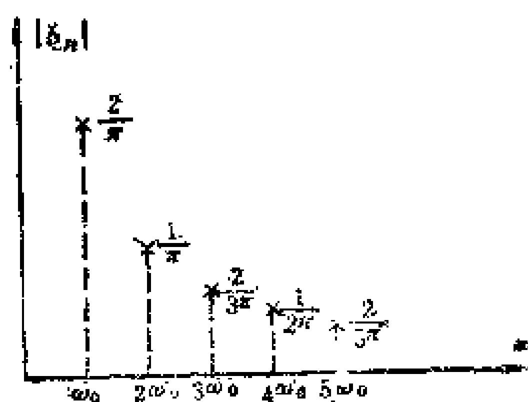
二、例 题

例题 1-1 求图示锯齿形波的付里叶级数，并绘出它的频谱曲线。

解：（1） 该锯齿形波的周期为 T，它在 $\left(-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$ 内可用时



例题图 1-1-1



例题图 1-1-2

域函数表示为：

$$f(t)=\frac{2}{T}t \qquad \left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right), \tag{1}$$

它是 t 的奇函数。

（2）由于 $f(t)$是周期函数，基频为 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，所以可以展开为包含基频和各种倍频成分的付里叶级数，即

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right), \tag{2}$$

其中

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2}{T}t\,dt=0,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2}{T}t\cos\frac{2\pi nt}{T}dt=0 \quad (\because f(t)\text{是奇函数}),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2}{T}t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1};$$

或

$$b_n=\begin{cases}-\dfrac{2}{n\pi} & (n\text{为偶数}),\\ \dfrac{2}{n\pi} & (n\text{为奇数}),\end{cases}$$

$$\therefore \quad f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T}. \tag{3}$$

又因

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T},$$

故

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\omega_0 t. \tag{4}$$

对应于频率$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \cdots$的谐波的振幅分别为$\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{3\pi}$, $\cdots$, 见例题图 1-1-2。由图可见，幅值谱是离散的。

（3） 付里叶变换

如果 $f_1(t)$的表达式为：

$$f_1(t)=\begin{cases}\frac{2}{T}t & \left(-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}\right),\\ 0 & (其它),\end{cases} \tag{5}$$

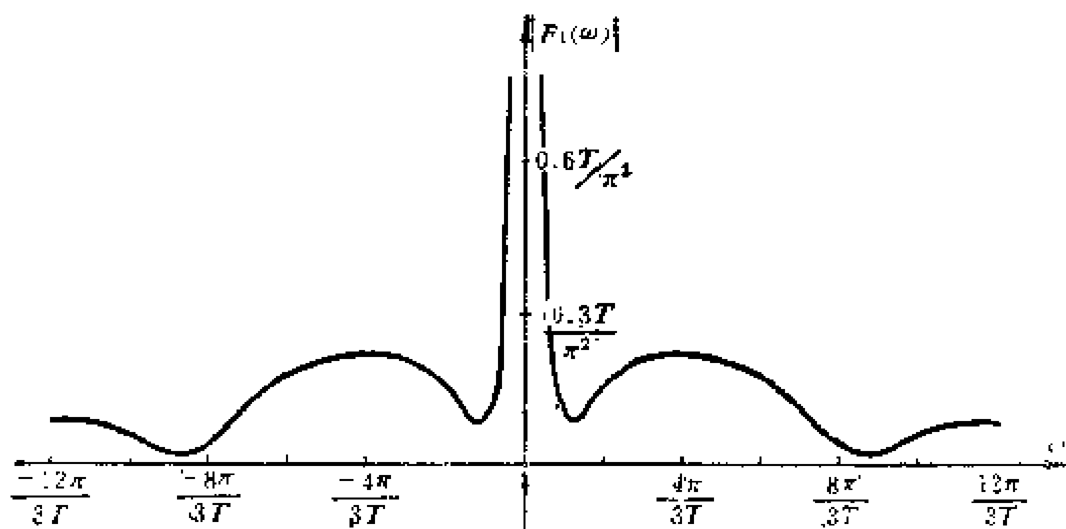
由于 $f_1(t)$是非周期函数，不能展成付里叶级数，但可进行付里叶变换：

$$\begin{aligned}F_1(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2}{T}te^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{-i\omega}\left(e^{-i\omega t}\cdot t\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-i\omega t}dt\right)\right]\\&=\frac{i}{\pi T\omega}\left(T\cos\frac{\omega T}{2}+\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right)\\&=\frac{i}{\pi\omega}\cos\frac{\omega T}{2}-\frac{2i}{\pi\omega^2T}\sin\frac{\omega T}{2}.\end{aligned} \tag{6}$$

由上式可见，$F_1(\omega)$为连续谱，如例题图 1-1-3 所示。

讨论：（1） 当原周期性锯齿波 $f(t)$在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$以外的部分被“截断”后，就变成一个单脉冲的非周期信号 $f_1(t)$，相应的频谱也由离散变为连续。

（2） 如果将 $f_1(t)$延伸为周期函数 $f(t)$，则(6)式中的$\frac{2}{T}t$可用(4)式代替，积分限也延伸为$(-\infty,\infty)$，即(6)式变为：



例题图 1-1-3

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}dt. \tag{7}$$

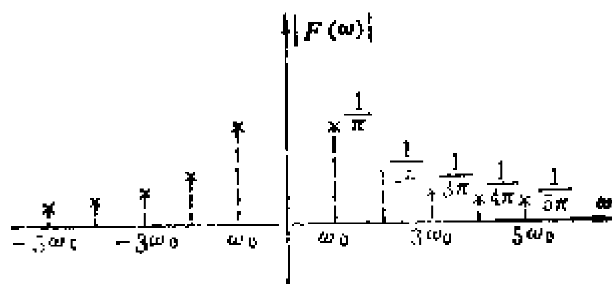
利用付里叶变换的对偶定理，不难证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a\sin n\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{ai}{2}[\delta(\omega+n\omega_0)-\delta(\omega-n\omega_0)], \tag{8}$$

故(7)式的结果是

$$F(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i(-1)^{n+1}}{n\pi}[\delta(\omega+n\omega_0)-\delta(\omega-n\omega_0)]. \tag{9}$$

由(9)式确定的 $|F(\omega)|$-ω 曲线如例题图 1-1-4 所示。该图与例题图 1-1-2 的区别仅在于双边谱代替了原来的单边谱而已。



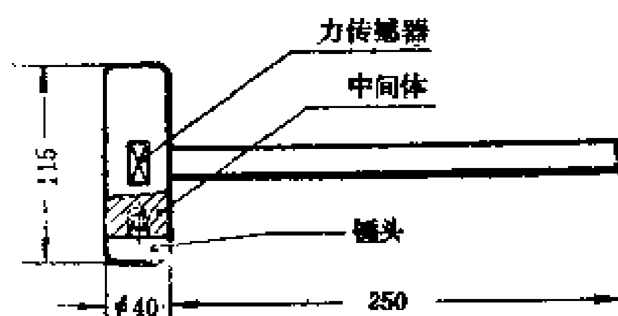
例题图 1-1-4

由此可见，周期函数的频谱图，既可从付里叶级数直接得出，也可从付里叶变换得出。付里叶级数与付里

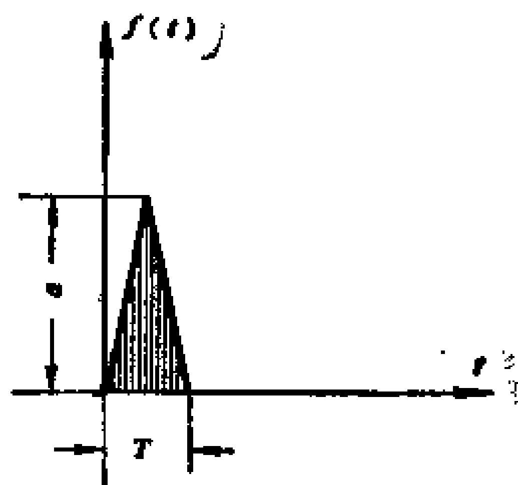
叶变换是相互联系的，后者适用于任何满足收敛条件的函数，而在函数具有周期性的特殊情况下，由前者获得频谱图更为简便。

(3) 许多振动讯号发生器输入的正弦波、三角波、方波等周期波，均可按上述方法进行频谱分析。

例题 1-2 在结构振动实验中，近年来常采用脉冲激振，即用锤子(见例题图 1-2-1)敲击在结构物上，使结构物在某处受脉冲力作用，而产生振动。由于锤头可以是钢、铜、铝，环氧树脂、有机玻璃及橡胶等，因此锤击力作用的时间T因材料不同而异，而波形都与例题图 1-2-2 的脉冲函数 $f(t)$ 近似。试求此函数的付里叶变换。



例题图 1-2-1



例题图 1-2-2

解：(1) 将力脉冲的时域函数表示为：

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0,\ t>T), \\ \dfrac{2a}{T}t & \left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2}\right), \\ 2a\left(1-\dfrac{t}{T}\right) & \left(\dfrac{T}{2}<t\leqslant T\right). \end{cases}$$

(2) 求 $f(t)$的付里叶变换

方法 1　直接用定义求

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2a}{T}te^{-i\omega t}dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}2a\left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-i\omega t}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2a}{T}\left[-\frac{t}{i\omega}e^{-i\omega t}+\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_0^{\frac{T}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left[\left(-\frac{2a}{i\omega}+\frac{2at}{i\omega T}-\frac{2a}{\omega^2T}\right)e^{-i\omega t}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\left(-\frac{a}{i\omega}+\frac{2a}{\omega^2T}\right)e^{-i\omega\frac{T}{2}}-\frac{2a}{\omega^2T}+\left(-\frac{2a}{i\omega}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2a}{i\omega}-\frac{2a}{\omega^2T}\right)e^{-i\omega T}+\left(\frac{2a}{i\omega}-\frac{a}{i\omega}+\frac{2a}{\omega^2T}\right)e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4a}{\omega^2T}e^{-i\omega\frac{T}{2}}-\frac{2a}{\omega^2T}-\frac{2a}{\omega^2T}e^{-i\omega T}\right\}$$

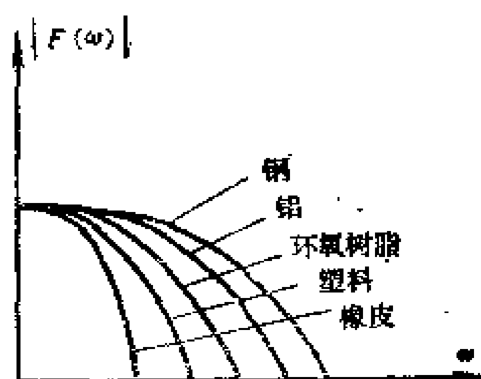
$$=\frac{2a}{2\pi\omega^2T}e^{-i\omega\frac{T}{2}}\left(2-e^{i\omega\frac{T}{2}}-e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right)$$

$$=\frac{2a}{\pi\omega^2T}e^{-i\omega\frac{T}{2}}\left(1-\cos\frac{\omega T}{2}\right).$$

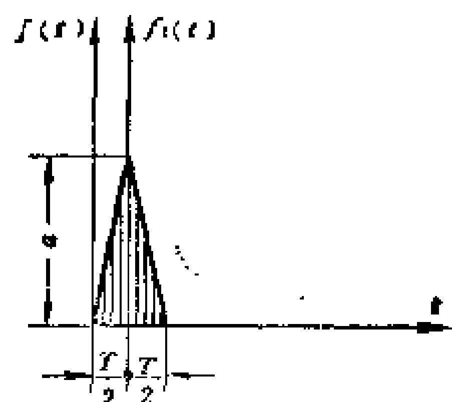
$|F(\omega)|$-ω 曲线如例题图 1-2-3 所示。

方法 2　先将纵坐标轴右移$\frac{T}{2}$，把 $f(t)$变成新坐标系下的偶函数 $f_1(t)$，见例题图 1-2-4。再求 $f_1(t)$的付里叶变换 $F_1(\omega)$，最后用付里叶变换的时移特性，求 $f(t)$的付里叶变换 $F(\omega)$。

$f(t)$和 $f_1(t)$满足下列关系式：



例题图 1-2-3



例题图 1-2-4

$$f(t)=f_1\left(t-\frac{T}{2}\right),$$

$$f_1(t)=\begin{cases}\frac{2a}{T}\left(\frac{T}{2}+t\right) & \left(-\frac{T}{2}<t<0\right),\\ \frac{2a}{T}\left(\frac{T}{2}-t\right) & \left(0\leqslant t<\frac{T}{2}\right),\\ 0 & \left(|t|\geqslant\frac{T}{2}\right);\end{cases}$$

$$\mathscr{F}_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cos\omega t dt-i\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\sin\omega t dt\right]$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2a}{T}\left(\frac{T}{2}-t\right)\cos\omega t dt$$

（$\because f_1(t)$ 是 t 的偶函数）

$$=\frac{a}{\pi\omega}\sin\omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{2a}{T\pi\omega}(t\sin\omega t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{2a}{T\pi\omega}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\omega t dt$$

$$=-\frac{2a}{\pi T\omega^2}\cos\omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{2a}{\pi T\omega^2}\left(1-\cos\frac{\omega T}{2}\right).$$

根据时移特性：若 $f_1(t)$ 的付里叶变换为 $F_1(\omega)$，则 $f_1\left(t-\frac{T}{2}\right)$的付里叶变换为 $F_1(\omega)e^{-i\omega\frac{T}{2}}$，而 $f_1\left(t-\frac{T}{2}\right)=f(t)$，故

$$F(\omega)=F_1(\omega)e^{-i\omega\frac{T}{2}}$$

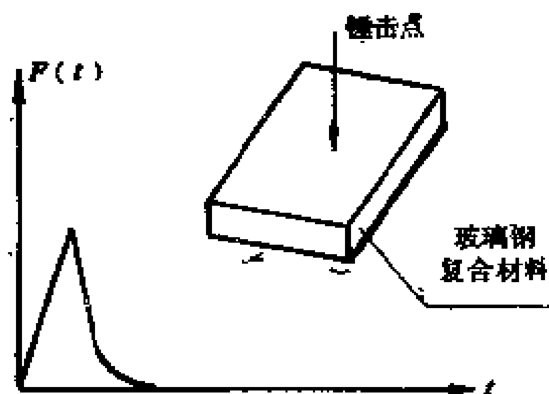
$$=\frac{2a}{\pi T\omega^2}e^{-i\omega\frac{T}{2}}\left(1-\cos\frac{\omega T}{2}\right).$$

结果与方法 1 相同。

讨论：(1) 因为 $f(t)$ 是实不对称函数，故它的付里叶变换 $F(\omega)$是复函数，且实频函数 $A(\omega)$为偶函数，虚频函数 $B(\omega)$为奇函数，这个复函数称为埃尔米特函数。

(2) 因为 $f_1(t)$是实对称函数，故它的付里叶变换 $F_1(\omega)$是实偶函数。

(3) 在付里叶变换中，应用函数的奇、偶特性，可使积分简化，变换后的图形特征清晰。



例题图 1-2-5

(4) 用三角形波近似锤击的力函数 $f(t)$ 是十分符合实际的。如某舰上的玻璃钢复合材料板，用力传感器装置的锤敲击时，其激励由磁带记录仪记录，并经电平仪放大后的图形如图 1-2-5 所示。

例题 1-3 将下列函数分解为偶函数和奇函数并分别作图。

(a) $$h(t)=\begin{cases}1 & (1<t<2),\\ 0 & (\text{其它});\end{cases}$$

(b) $$h(t)=\frac{1}{2-(t-2)^2}.$$

解：(a) 将已知函数中的 t 用 $-t$ 代入

$$h(-t)=\begin{cases}1 & (-2<t<-1),\\ 0 & (\text{其它}),\end{cases}$$

则

$$h(t)=\frac{1}{2}[h(t)+h(-t)]+\frac{1}{2}[h(t)-h(-t)]$$

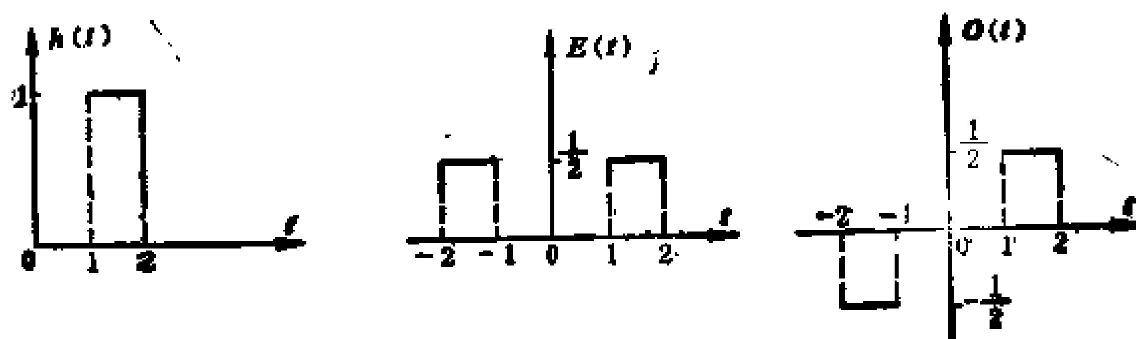
$$=E(t)+O(t),$$

式中

$$E(t)=\frac{1}{2}[h(t)+h(-t)]=\begin{cases}\frac{1}{2} & (1<|t|<2),\\ 0 & (其它);\end{cases}$$

$$O(t)=\frac{1}{2}[h(t)-h(-t)]=\begin{cases}-\frac{1}{2} & (-2<t<-1),\\ \frac{1}{2} & (1<t<2),\\ 0 & (其它).\end{cases}$$

显然，$E(t)$ 为偶函数而 $O(t)$ 为奇函数，其图形如例题图 1-3-1 所示。



例题图 1-3-1

(b) 与(a)类似，先求得

$$h(-t)=\frac{1}{2-(t+2)^2},$$

于是

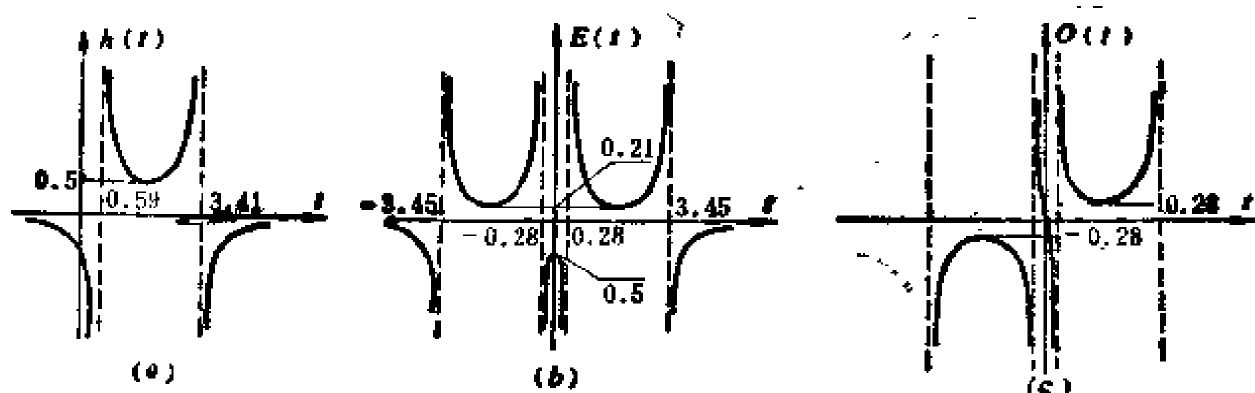
$$\begin{aligned}E(t)&=\frac{1}{2}[h(t)+h(-t)]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2-(t-2)^2}+\frac{1}{2-(t+2)^2}\right]\\&=\frac{t^2+2}{-t^4+12t^2-4},\end{aligned}$$

$$O(t)=\frac{1}{2}[h(t)-h(-t)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2-(t-2)^2}-\frac{1}{2-(t+2)^2}\right]$$

$$=\frac{4t}{-t^4+12t^2-4},$$

其图形如例题图 1-3-2 所示。



例题图 1-3-2

讨论：从例题 1-2 已可看出：将函数变换成奇、偶函数，可以简化付里叶变换的运算。本题提供了这种变换的一般方法，应用式

$$h(t)=E(t)+O(t), \tag{1}$$

则 $h(t)$的付里叶变换为：

$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[E(t)+O(t)](\cos\omega t-i\sin\omega t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\infty}E(t)\cos\omega t dt-i\int_{0}^{\infty}O(t)\sin\omega t dt\right]. \tag{2}$$

一般地，若 $E(t)$和$O(t)$为复函数，则

$$h(t)=E(t)+O(t)$$

$$=\mathrm{Re}\,E(t)+i\,\mathrm{Im}\,E(t)+\mathrm{Re}\,O(t)+i\,\mathrm{Im}\,O(t), \tag{3}$$

其中，Re 和 Im 分别为实部和虚部的记号。上式右端四项分别为实偶、虚偶、实奇、虚奇函数。经付里叶变换后，

$$H(\omega)=E(\omega)+O(\omega)$$
$$=\mathrm{Re}\,E(\omega)+i\,\mathrm{Im}\,E(\omega)-i\,\mathrm{Im}\,O(\omega)+\mathrm{Re}\,O(\omega), \quad (4)$$

上式右端各项分别对应于(3)式右端各项，它们分别是实偶、虚偶、虚奇、实奇函数。

例题 1-4 求下列函数的付里叶变换：

(a) $h(t)=e^{-a|t|} \quad (-\infty<t<\infty)$,

(b) $f(t)=\frac{1}{2}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$.

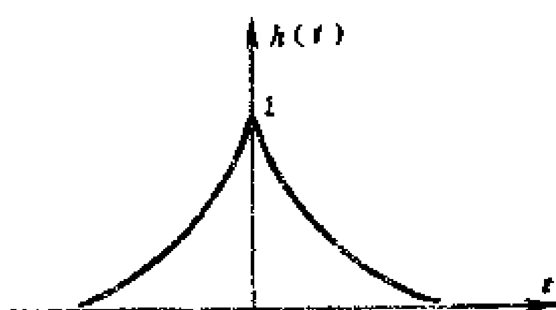
解：(a) $h(t)$也可写成如下形式：

$$h(t)=e^{-a|t|}=\begin{cases}e^{at} & (-\infty<t<0),\\ e^{-at} & (0\leqslant t<\infty).\end{cases}$$

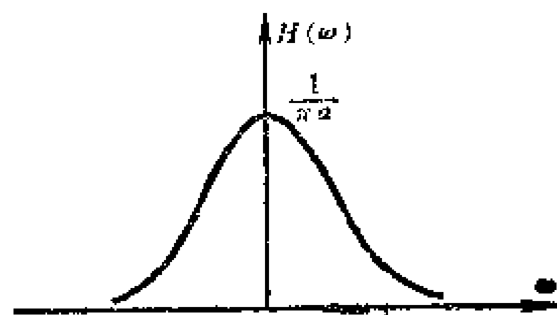
求 $h(t)$的付里叶变换

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{at}\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-i\omega t}dt\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{a^2+\omega^2}\right).\end{aligned}$$

$h(t)$和 $H(\omega)$曲线分别如例题图 1-4-1 和 1-4-2 所示。



例题图 1-4-1



例题图 1-4-2

讨论：(1) 本题的 $h(t)$是实偶函数，所以付里叶变换 $H(\omega)$ 是频域的实偶函数。

(2) 当 $a=0$ 时，则 $h(t)=1$，经付里叶变换得

$$H(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i\omega}(e^{i\omega T}-e^{-i\omega T})$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega T$$

$$=\delta(\omega).\ (\text{上述极限是 }\delta\text{ 函数的定义式之一})$$

当 $a>0$ 时：

若 $\omega\to0$，则 $H(\omega)\to\frac{1}{\pi a}$，

若 $\omega\to\infty$，则 $H(\omega)\to0$；

当 $a<0$ 时：

付里叶变换的条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$不满足，因而不存在付里叶变换。

(b) $f(t)=\frac{1}{2}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$,

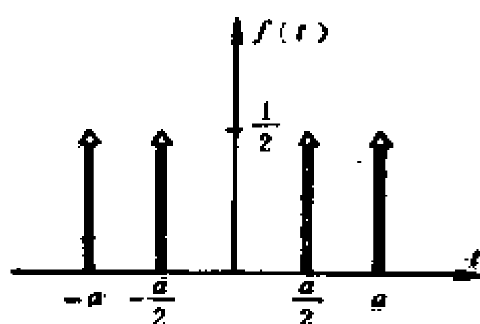
$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]\cdot e^{-i\omega t}dt\right.$$

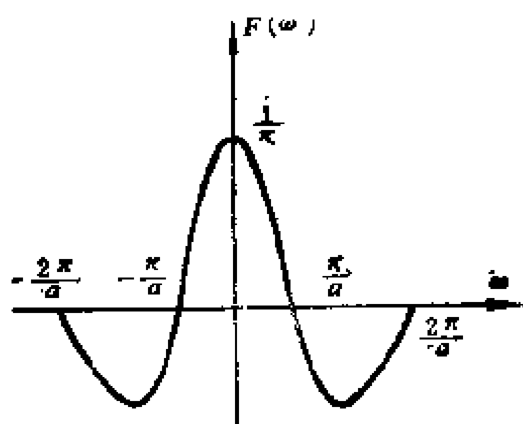
$$=\frac{1}{4\pi}\left[e^{-i\omega(-a)}+e^{-i\omega a}+e^{-i\omega\left(-\frac{a}{2}\right)}+e^{-i\omega\left(\frac{a}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\cos\omega a+\cos\frac{\omega a}{2}\right].$$

$f(t)$和 $F(\omega)$曲线分别如例题图 1-4-3 和 1-4-4 所示。



例题图 1-4-3



例题图 1-4-4

例题 1-5 求下列函数付里叶变换的振幅谱和相位谱：

(a) $h(t)=e^{-\pi t^2}$ $\quad(-\infty<t<\infty)$，

(b) $f(t)=\begin{cases} e^{-at}\sin\omega_0 t & (t>0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$

解：(a) 方法 1

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}\cos(2\pi ft)dt.\quad (\because h(t)\text{是 } t \text{ 的偶函数})$$

因指数有 t^2 项，所以不能用普通分部积分法，需先对 $H(f)$ 求导：

$$H'(f)=\frac{d}{df}\left[2\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}\cos(2\pi ft)dt\right]$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}\frac{d\cos(2\pi ft)}{df}dt$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}[-\sin(2\pi ft)\cdot 2\pi t]dt$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}\sin(2\pi ft)d(-\pi t^2)$$

$$=2\int_0^{\infty}\sin(2\pi ft)d[e^{-\pi t^2}]$$

$$=2\left\{e^{-\pi t^2}\sin(2\pi f t)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}2\pi f\cos(2\pi f t)dt\right\}$$

$$=0-4\pi f\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}\cos(2\pi f t)dt$$

$$=-2\pi f\cdot H(f),$$

$$\therefore\quad \frac{H'(f)}{H(f)}=-2\pi f.$$

再对上式求积分：

$$左边：\int_0^f\frac{H'(f)}{H(f)}df=\int_0^f\frac{d[H(f)]}{H(f)}=$$

$$=\int_0^f d\{\ln[H(f)]\}=\ln\left[\frac{H(f)}{H(0)}\right],$$

$$右边：-\int_0^f 2\pi f df=-\pi f^2,$$

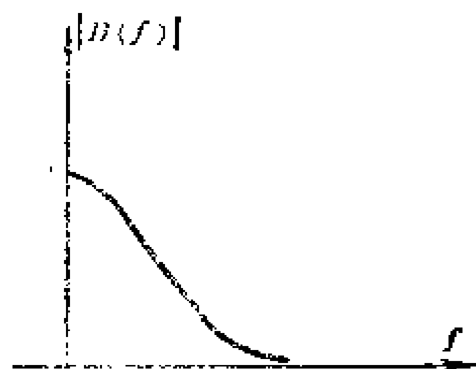
$$\therefore\quad \ln\left[\frac{H(f)}{H(0)}\right]=-\pi f^2,$$

即
$$H(f)=H(0)e^{-\pi f^2},$$

式中
$$H(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}dt$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-\pi t^2}dt\quad（查积分表）$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}=1,$$



例题图 1-5-1

$$\therefore\quad H(f)=H(0)e^{-\pi f^2}=e^{-\pi f^2}.$$

$H(f)$的实部

$$A(f)=e^{-\pi f^2},$$

虚部

$$B(f)=0,$$

$$\therefore\quad |H(f)|=e^{-\pi f^2},$$

$$\theta(f)=0.$$

$|H(f)|$曲线如例题图 1-5-1 所示。

方法 2　将 e 的指数作适当整理，直接应用积分公式：

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{[-\pi(t+if)^2-\pi f^2]}d(t+if).$$

记　$t+if=x$，则

$$H(f)=e^{-\pi f^2}\cdot 2\int_0^{\infty}e^{-(\sqrt{\pi}x)^2}dx$$

$$=e^{-\pi f^2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$=e^{-\pi f^2}.$$

(b)　∵　$f(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t & (\text{当}t>0),\\ 0 & (\text{当}t<0),\end{cases}$

∴
$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+i\omega)t}\sin\omega_0 t\,dt.$$

由积分表查得

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2},$$

故

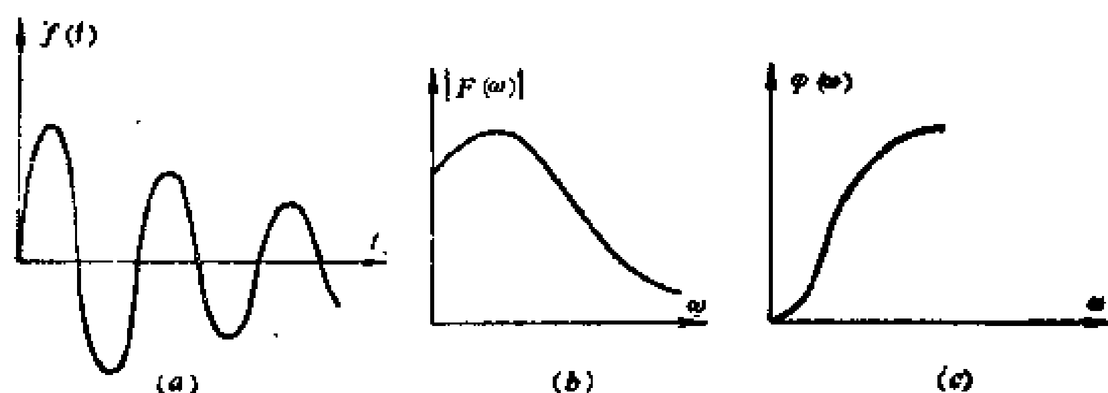
$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\omega_0}{(\alpha+i\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0}{(\alpha^2+\omega_0^2-\omega^2)+2i\alpha\omega},$$

∴
$$|F(\omega)|=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0}{\sqrt{(\alpha^2+\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{tg}^{-1}\frac{-2\alpha\omega}{\alpha^2+\omega_0^2-\omega^2}.$$

$f(t)$，$|F(\omega)|$，$\varphi(\omega)$ 曲线分别如例题图 1-5-2 之(a)，(b)，(c)所示。



例题图 1-5-2

例题 1-6 求下列各函数的付里叶逆变换：

(a) $H(f)=\frac{1}{(i2\pi f+\alpha)^2}\ (\alpha>0)$；

(b) $H(f)=\frac{f^3}{f^4+\alpha}\ (\alpha>0)$；

(c) $H(f)=\frac{1}{(i2\pi f+\alpha)^3}\ (\alpha>0)$；

(d) $H(f)=\frac{\beta}{(\alpha+i2\pi f)^2+\beta^2}\qquad(\beta>0)$；

(e) $H(f)=\begin{cases}(1-f^2)^2 & (|f|<1),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$

解： (a) 方法 1　直接进行逆付里叶变换

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(i2\pi f+\alpha)^2}e^{i2\pi ft}df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{(i2\pi f+\alpha)^2}df+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi ft)}{(i2\pi f+\alpha)^2}df$$

（经分部积分）

$$=t\left[i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi ft)}{(i2\pi f+\alpha)}df+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{(i2\pi f+\alpha)}df\right]$$

$$=t\Big[\ i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\sin(2\pi f t)}{4\pi^2f^2+a^2}\,df+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi f\sin(2\pi f t)}{4\pi^2f^2+a^2}df$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\cos(2\pi f t)}{4\pi^2f^2+a^2}\,df-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi f\cos(2\pi f t)}{4\pi^2f^2+a^2}df\ \Big]$$

$$=t\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\cos(2\pi f t)}{4\pi^2f^2+a^2}\,df+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi f\sin(2\pi f t)}{4\pi^2f^2+a^2}df\ \Big].$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{b}e^{-ab}\qquad(a>0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{b^2+x^2}dx=\pi e^{-ab}\qquad(a>0),$$

得
$$h(t)=\frac{t}{4\pi^2}\Big[\ a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi f t)}{(a/2\pi)^2+f^2}df+$$

$$+2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\sin(2\pi f t)}{(a/2\pi)^2+f^2}df\ \Big]$$

$$=\frac{t}{4\pi^2}\Big[\ a\cdot\frac{\pi}{a/2\pi}e^{-(2\pi|t|a/2\pi)}+2\pi^2e^{-(2\pi|t|a/2\pi)}\cdot\operatorname{sgn}t\Big]$$

$$=te^{-a|t|}\left(\frac{1+\operatorname{sgn}t}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}te^{-at} & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

方法 2　直接利用留数定理：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z);\ a_k],$$

式中，z 为复变量，$\operatorname{Res}[f(z);\ a_k]$表示复变函数 $f(z)$ 在上半平面的奇点 a_k 处的留数。

本题中，$f(z)=e^{i2\pi zt}/(i\,2\pi z-a)^2$，当 $t>0$ 时，$f(z)$满足约当引理的条件，可以应用留数定理。在上半平面中，点 $z=\frac{a}{2\pi}i$ 是函数的二阶极点，故在该点的留数为：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{i2\pi zt}}{(i2\pi z+\alpha)^2},\ \frac{\alpha}{2\pi}i\right]$$

$$=\lim_{z\to\frac{\alpha}{2\pi}i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\left(z-\frac{\alpha}{2\pi}i\right)^2\cdot e^{i2\pi zt}}{(i2\pi z+\alpha)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to\frac{\alpha}{2\pi}i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i2\pi zt}}{-4\pi^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\lim_{z\to\frac{\alpha}{2\pi}i} i2\pi t e^{i2\pi zt}$$

$$=-\frac{it}{2\pi}e^{-\alpha t}\qquad (t>0\text{时}),$$

所以 $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi ft}}{(i2\pi f+\alpha)^2}df=2\pi i\cdot\left[\frac{-it}{2\pi}e^{-\alpha t}\right]=te^{-\alpha t}$

$(t>0$ 时)

当 $t<0$ 时，由于函数在下半平面无奇点，故上述积分为零。把结果合写在一起，即

$$h(t)=\begin{cases}te^{-\alpha t} & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

上述两种方法所得结果完全一致。

讨论：(1) 将所得结果作付里叶变换，**可用来校核。**

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}te^{-(\alpha+i2\pi f)t}dt$$

$$=\frac{e^{-(\alpha+i2\pi f)t}}{[-(\alpha+i2\pi f)]^2}[-(\alpha+i2\pi f)t-1]\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{(\alpha+i2\pi f)^2}.$$

此即本题已知的函数

(2) 此题中对 α 值是有限制的，类似于例题 1-4 中的 α 值。

(b) 应用留数定理。

函数 $H(z)=\frac{z^3}{z^4-\alpha}e^{i2\pi zt}$ 在上半平面的奇点为 $A(\pm 1+i)$，这里 $A=\sqrt[4]{\alpha/4}$，可求得

$$\text{Res}[H(z),\ A(\pm 1+i)]=\frac{1}{4}e^{i2\pi tA(\pm 1+i)}.$$

当 $t>0$ 时，$H(z)$ 满足约当引理的条件，于是有

$$h(t)=2\pi i\cdot\frac{1}{4}e^{i2\pi tA}\{e^{i2\pi tA}+e^{-i2\pi tA}$$

$$=\pi ie^{-2\pi tA}\cos(2\pi tA);$$

当 $t<0$ 时，令 $z=-u$，原积分化为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^3}{z^4+\alpha}e^{i2\pi zt}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-u^3}{u^4+\alpha}e^{i2\pi(-u)t}d(-u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{u^3}{u^4+\alpha}e^{i2\pi u(-t)}du,$$

因 $-t>0$，故仍可应用约当引理，此时有

$$h(t)=-\pi ie^{-2\pi(-t)A}\cos(-2\pi tA).$$

合并上述结果，可得

$$h(t)=\pi ie^{-2\pi|t|A}\cos(2\pi|t|A)\cdot\text{sgn}t$$

$$=\pi ie^{-\sqrt[4]{4\alpha}\pi|t|}\cos(\sqrt[4]{4\alpha}\pi t)\cdot\text{sgn}t.$$

讨论：以上结果限制$\alpha>0$；请读者思考，当$\alpha<0$或$\alpha=0$时，$h(t)$又应等于什么？

(c) 方法1 设

$$A(f)=\frac{1}{(i2\pi f-\alpha)^2},$$

则

$$H(f)=\frac{i}{4\pi}\frac{dA(f)}{df}.$$

由本题之(a)小题知

$$\mathscr{F}^{-1}[A(f)]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{(i2\pi f+a)^2}\right]$$

$$=\begin{cases} te^{-at} & (t\geqslant 0, a>0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

根据付里叶变换的微商特性，若$A(f)$的逆变换为$A(t)$，则$\frac{d^n A(f)}{df^n}$的逆变换为$(-i2\pi t)^n A(t)$。令$n=1$，所以

$$\mathscr{F}^{-1}[H(f)]=(-i2\pi t)\cdot A(t)$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2e^{-at} & (t\geqslant 0,\ a>0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

方法2 应用留数定理。

因$\frac{a}{2\pi}i$为三阶极点，故

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{i2\pi zt}}{(i2\pi z+a)^2},\ \frac{a}{2\pi}i\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{a}{2\pi}i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\left(z-\frac{a}{2\pi}i\right)e^{i2\pi zt}}{(i2\pi z+a)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2\pi i}e^{-at},$$

$$\therefore\quad h(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2e^{-at} & (t\geqslant 0,\ a>0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

(d) $H(f)=\frac{\beta}{\beta^2-(2\pi f-i\alpha)^2}$

$$=\beta\left[\frac{1}{\beta-(2\pi f-i\alpha)}\cdot\frac{1}{\beta+(2\pi f-i\alpha)}\right]$$

$$=-\beta\left[\frac{1}{\beta+i\alpha-2\pi f}\cdot\frac{1}{-\beta+i\alpha-2\pi f}\right]$$

$$= -\beta[H_1(f)\cdot H_2(f)],$$

式中

$$H_1(f)=\frac{1}{\beta+i\alpha-2\pi f};$$

$$H_2(f)=\frac{1}{-\beta+i\alpha-2\pi f}.$$

查付里叶变换表知

$$\mathscr{F}^{-1}[H_1(f)]=h_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{i}e^{i\beta t}e^{-\alpha t} & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[H_2(f)]=h_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{i}e^{-i\beta t}e^{-\alpha t} & (t\geqslant 0);\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

根据付里叶变换的相乘特性和褶积特性可知，$H_1(f)\cdot H_2(f)$的逆变换为 $h_1(t)*h_2(t)$。这里“$*$”为褶积记号，即

$$h_1(t)*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau,$$

故

$$h(t)=-\beta\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\beta\int_0^t e^{(-\alpha+i\beta)\tau}e^{(-\alpha-i\beta)(t-\tau)}d\tau$$

（∵自变量 τ 必须满足 $\tau>0$ 及$(t-\tau)>0$，∴τ 的积分域为 $0-t$）

$$=\begin{cases}e^{-\alpha t}\sin\beta t & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

实际上，仔细观察一下例题 1-5 (b)中所得的 $F(\omega)$，若将它变换为f 的函数，就是

$$F(f)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)=\frac{\omega_0}{(\alpha+i2\pi f)^2+\omega_0^2},$$

即本题的 $H(f)$中 β 写成ω_0的情况，于是立即可知所求的

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}\sin\beta t & (t\geqslant 0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

(e) $$h(t)=\int_{-1}^{1}(1-2f^2+f^4)e^{i2\pi ft}df.$$

记 $$I_n=\int_{-1}^{1}f^n e^{i2\pi ft}df$$

$$=\frac{1}{i2\pi t}e^{i2\pi ft}f^n\Big|_{-1}^{1}-\frac{n}{i2\pi t}\int_{-1}^{1}e^{i2\pi ft}f^{n-1}df$$

$$=\frac{1}{i\pi t}\cdot\frac{e^{i2\pi t}-(-1)^n e^{-i2\pi t}}{2}-\frac{n}{i2\pi t}I_{n-1},$$

则 $$I_0=\int_{-1}^{1}e^{i2\pi ft}df=\frac{1}{i2\pi t}(e^{i2\pi t}-e^{-i2\pi t})=\frac{1}{\pi t}\sin 2\pi t;$$

$$I_2=\frac{1}{\pi t}\sin 2\pi t+\frac{1}{(\pi t)^2}\cos 2\pi t-\frac{1}{2(\pi t)^3}\sin 2\pi t;$$

$$I_4=\frac{1}{\pi t}\sin 2\pi t+\frac{2}{(\pi t)^2}\cos 2\pi t-\frac{3}{(\pi t)^3}\sin 2\pi t-$$

$$-\frac{3}{(\pi t)^4}\cos 2\pi t+\frac{3}{2}\frac{1}{(\pi t)^5}\sin 2\pi t.$$

∴ $$h(t)=I_0-2I_2+I_4=\left[-\frac{3}{(\pi t)^4}-\frac{4}{(\pi t)^2}\right]\cos 2\pi t+$$

$$+\left[-\frac{2}{(\pi t)^3}+\frac{3}{2}\frac{1}{(\pi t)^5}\right]\sin 2\pi t$$

$$=-\frac{1}{(\pi t)^2}\left\{\left[4-\frac{3}{(\pi t)^2}\right]\cos 2\pi t+\right.$$

$$\left.+\left[4-\frac{3}{(\pi t)^2}\right]\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}\right\}.$$

显然，$h(t)$是t的偶函数，这正是我们所预期的。

讨论：从以上几个例题中可见，求函数的付里叶变换和逆付里叶变换，可应用下列方法和技巧：

(1) 查付里叶变换表，此法适用于较简单的函数，如例题1-6(d)。

(2) 查积分表。如例题 1-5(a)方法 2 和(b)，例题 1-6(a)方

法 1。

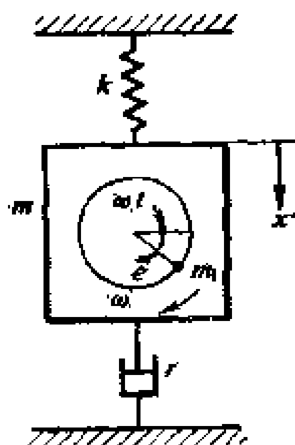
（3）直接积分。积分中常应用分部积分法（例题 1-6（a）方法 1，例题 1-1，1-2 等）及其它技巧（例题 1-5 方法 1，例题 1-6(e)）。

（4）通过坐标平移（例题 1-2 方法 2）或其它方法（例题 1-3），先将函数变换为奇、偶函数。

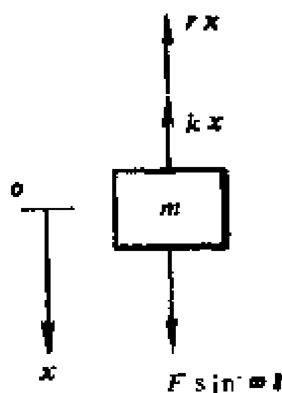
（5）利用付里叶变换的时移特性（例题 1-2 方法 2）、微商特性（例题 1-6(c)方法 1）、褶积特性（例题 1-6(d)）等。

（6）应用复变函数中的留数定理（例题 1-6(a)和(c) 的方法 2）。

例题 1-7 例题图 1-7-1 所示系统中，主质量 m 上有偏心质量 m_1 以匀角速 ω 旋转，偏心距为 e。m 通过弹簧 k 和阻尼器 r 与基础相连。如果只考虑质量 m 在铅垂方向的振动，试用拉普拉斯变换求其振动规律。



例题图 1-7-1



例题图 1-7-2

解：（1）建立系统振动的微分方程。

这是一个单自由度振动系统，它在正弦力 $f(t)=m_1e\omega^2\sin\omega t$ 作用下作受迫振动，记激励力幅 $F=m_1e\omega^2$，m 为振体（包括偏心质量 m_1）质量，则振体受力分析如例题图 1-7-2 所示。取静平衡位置为 x 坐标原点，向下为正，则根据牛顿第二定律得

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F\sin\omega t$$

或

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F\sin\omega t. \qquad (1)$$

若把激励$f(t)$用复数形式表示，则响应的虚部或实部就表示振体m的运动。此时方程为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t}. \qquad (2)$$

(2) 对方程(2)进行拉普拉斯变换。

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + r[sX(s) - x(0)] + kX(s) = \frac{F}{s - i\omega}.$$

设初位移和初速度均为零，则得

$$X(s) = \frac{F/m}{(s - i\omega)(s^2 + 2ns + \omega_0^2)}, \qquad (3)$$

式中，$n = \frac{r}{2m}$，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

若记 $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$，$s_1 = -n + i\omega_n$，$s_1^* = -n - i\omega_n$，则响应的拉普拉斯变换式为

$$X(s) = \frac{F/m}{(s - i\omega)(s - s_1)(s - s_1^*)}. \qquad (4)$$

(3) 用逆拉普拉斯变换，求系统的振动规律$x(t)$。

(a) 查表法

通过查逆拉普拉斯变换表得

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)]$$

$$= \frac{F}{m}\left[\frac{e^{i\omega t}}{(-s_1 + i\omega)(-s_1^* + i\omega)} + \frac{e^{s_1 t}}{(-i\omega + s_1)(-s_1^* + s_1)} + \frac{e^{s_1^* t}}{(-i\omega + s_1^*)(-s_1 + s_1^*)}\right]$$

$$= \frac{F}{m}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{s_1 t} + A_3 e^{s_1^* t}), \qquad (5)$$

式中，A_1，A_2，A_3分别是括号中三个e的指数函数的系数。

(b) 展成分部分式法

将(4)式展成

$$\frac{F/m}{(s-i\omega)(s-s_1)(s-s_1^*)}=\frac{F}{m}\left[\frac{A_1}{(s-i\omega)}+\frac{A_2}{(s-s_1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{A_3}{(s-s_1^*)}\right], \tag{6}$$

式中，A_1、A_2、A_3 为待定常数，它们应满足：

$$A_1(s-s_1)(s-s_1^*)+A_2(s-i\omega)(s-s_1^*)+$$
$$+A_3(s-i\omega)(s-s_1)=1.$$

令 $s=i\omega$，得

$$A_1=\frac{1}{(i\omega-s_1)(i\omega-s_1^*)}.$$

令 $s=s_1$，得

$$A_2=\frac{1}{(s_1-i\omega)(s_1-s_1^*)}.$$

令 $s=s_1^*$，得

$$A_3=\frac{1}{(s_1^*-i\omega)(s_1^*-s_1)}.$$

将 A_1、A_2、A_3 代入(6)式，并利用变换公式

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at},$$

可得

$$x(t)=\frac{F}{m}(A_1e^{i\omega t}+A_2e^{s_1t}+A_3e^{s_1^*t}). \tag{7}$$

(c) 留数定理积分法

从(4)式可见，复函数 $X(s)$ 有 $i\omega$、s_1、s_1^* 三个极点，根据海维赛展开式得

$$x(t)=$$
$$=\frac{F}{m}\left[\frac{e^{st}}{(s-s_1)(s-s_1^*)+(s-i\omega)(s-s_1^*)+(s-i\omega)(s-s_1)}\right|_{s=i\omega}+$$

$$+\frac{e^{st}}{(s-s_1)(s-s_1^*)+(s-i\omega)(s-s_1^*)+(s-i\omega)(s-s_1)}\Bigg|_{s=s_1}+$$

$$+\frac{e^{st}}{(s-s_1)(s-s_1^*)+(s-i\omega)(s-s_1^*)+(s-i\omega)(s-s_1)}\Bigg|_{s=s_1^*}\Bigg]$$

$$=\frac{F}{m}\Big[\frac{e^{i\omega t}}{(i\omega-s_1)(i\omega-s_1^*)}+\frac{e^{s_1t}}{(s_1-i\omega)(s_1-s_1^*)}+$$

$$+\frac{e^{s_1^*t}}{(s_1^*-i\omega)(s_1^*-s_1)}\Big]$$

$$=\frac{F}{m}[A_1e^{i\omega t}+A_2e^{s_1t}+A_3e^{s_1^*t}]. \tag{8}$$

(d) 卷积定理法

从(4)式可得

$$X(s)=\frac{F/m}{(s-i\omega)(s-s_1)(s-s_1^*)}$$

$$=\frac{F}{m\omega_n}\Big[\frac{\omega_n}{(s+n)^2+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{(s-i\omega)}\Big].$$

$\because\quad \mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{\omega_n}{(s+n)^2+\omega_n^2}\Big]=e^{-nt}\sin\omega_nt;$

$\quad\quad \mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-i\omega}\Big]=e^{i\omega t}.$

$$\therefore\quad x(t)=\frac{F}{m\omega_n}\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{\omega_n}{(s+n)^2+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{(s-i\omega)}\Big]$$

$$=\frac{F}{m\omega_n}[e^{-nt}\sin\omega_nt * e^{i\omega t}]$$

$$=\frac{F}{m\omega_n}\int_0^t e^{-n\tau}\sin\omega_n\tau\cdot e^{i\omega(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{F}{m\omega_n}e^{i\omega t}\int_0^t e^{-(n+i\omega)\tau}\sin\omega_n\tau d\tau$$

$$=\frac{F}{m\omega_n}e^{i\omega t}\Big\{\frac{e^{-(n+i\omega)\tau}}{(n+i\omega)^2+\omega_n^2}[-(n+i\omega)\sin\omega_n\tau$$

$$-\omega_n\cos\omega_n\tau]\Big\}\Big|_0^t$$

$$=\frac{F}{m[(\omega_0^2-\omega^2)+2ni\omega]}\Big\{-e^{-nt}\Big[\frac{(n-i\omega)}{\omega_n}\sin\omega_nt+$$

$$+\cos\omega_n t\Big]+e^{i\omega t}\Big\}. \tag{9}$$

由于本题中激励为正弦函数，故将以上四种方法求得的$x(t)$取其虚部，即为(1)式的解：

$$\text{Im}[x(t)]=\frac{F\omega}{m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2]}\Big\{2ne^{-nt}\cos\omega_n t+$$
$$+\frac{[2n^2-(\omega_0^2-\omega^2)]}{\omega_n}e^{-nt}\sin\omega_n t-2n\cos\omega t+$$
$$+\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\omega}\sin\omega t\Big\}. \tag{10}$$

(e) 直接拉普拉斯变换法

将方程(1)直换进行拉普拉斯变换（考虑到初始条件为零）得

$$ms^2X(s)+rsX(s)+kX(s)=\frac{F\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{11}$$

整理后得

$$X(s)=\frac{F\omega}{m(s^2+\omega^2)(s^2+2ns+\omega^2)}$$
$$=\frac{F\omega}{m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2]}\times$$
$$\times\left[\frac{2n(s+n)+2n^2-(\omega_0^2-\omega^2)}{(s+n)^2+\omega_n^2}+\frac{-2ns+(\omega_0^2-\omega^2)}{s^2+\omega^2}\right]. \tag{12}$$

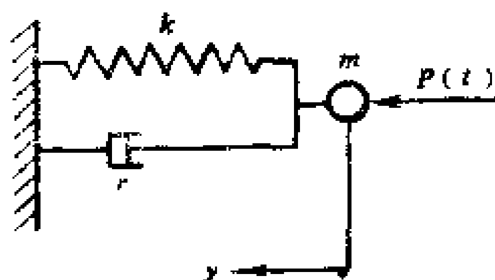
查逆拉普拉斯变换表，当$\omega_0>n$时所得的$x(t)$，与（10）式完全相同。

讨论：（1）本题建立振动微分方程的方法很多，如牛顿第二定律、达朗伯原理、拉格朗日方程、哈密尔顿原理等。

（2）用拉普拉斯变换解微分方程的方法也很多，上面用了五种，这些方法本质都是一样的。

（3）若振动的激励用复数表示，则响应也是复函数。但是要根据激励是正弦函数还是余弦函数，分别只取其虚部或实部，而不是两者都取。

(4) 激励为谐和函数时，进行拉普拉斯变换的方法有两种：直接变换或写成 e 的指数形式后再变换。它们各有优缺点：前者的响应可直接从逆拉普拉斯变换得出，而后者要取逆拉普拉斯变换的实部或虚部才能得到响应。但前者要将拉普拉斯变换式配成适于查表的形式，一般颇不容易，故还是后一方法用得较多。



例题图 1-8-1

例题 1-8 求图示振动模型的动刚度。

解：(1) 对质量 m 进行受力分析，应用牛顿第二定律，得

$$m\ddot{y}+r\dot{y}+ky=P(t). \tag{1}$$

(2) 上式两边进行拉普拉斯变换，若质量 m 的初始条件为零，则

$$k\left(\frac{s^2}{\omega_0^2}+\frac{2\zeta}{\omega_0}s+1\right)Y(s)=P(s), \tag{2}$$

式中，$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\zeta=\dfrac{r}{2\sqrt{km}}$。

故传递函数

$$H(s)=\frac{输出的拉普拉斯变换\,Y(s)}{输入的拉普拉斯变换\,P(s)}=\frac{1}{k\left(1+\dfrac{2\zeta}{\omega_0}s+\dfrac{s^2}{\omega_0^2}\right)}. \tag{3}$$

(3) 动刚度

$$K(s)=\frac{力激励的拉普拉斯变换}{位移响应的拉普拉斯变换}=k\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_0}s+\frac{s^2}{\omega_0^2}\right). \tag{4}$$

动刚度反映了系统抵抗外界动载荷作用而不变形的能力。在同样的动力激励下，系统的动刚度越大，则位移响应越小。

讨论：(1) 当激励为简谐函数时，$s=i\omega$，代入(4)式得

$$K(i\omega)=k\left(1+\frac{2\xi}{\omega_0}(i\omega)-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$=k\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)-i\,2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right]. \tag{5}$$

当 $\omega=0$ 时、质量受到静力作用，

$$K(i\omega)=k,$$

为静刚度。

(2) 动刚度 $K(s)$ 是复函数，它的幅值 $|K(i\omega)|$ 及相位角 ϕ 可用下式表示：

$$|K(i\omega)|=k\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

$$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right]. \tag{7}$$

由(6)式可见，动刚度与静刚度不同，当系统的参数 k、m、r 都确定时，它还与激励的频率有关。

由$\dfrac{d|K(i\omega)|}{d\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}=0$，可求得动刚度为最小值时的频率

$$\omega_c=\sqrt{1-2\xi^2}\,\omega_0, \tag{8}$$

代入(6)式，得最小动刚度为

$$|K(i\omega)|_{min}=|K(i\omega)|_{\omega=\omega_c}=2\xi k\sqrt{1-\xi^2}. \tag{9}$$

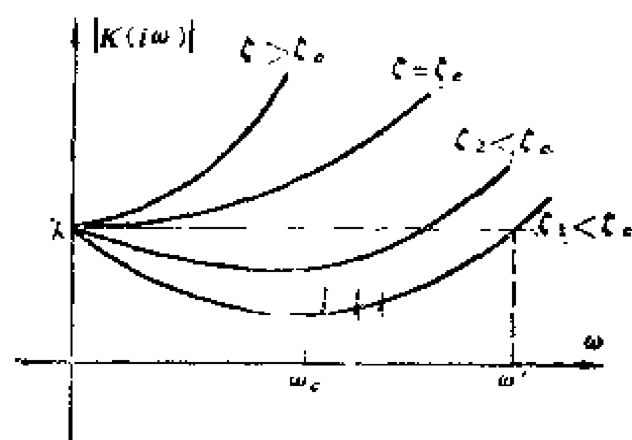
当 ξ 很小时，

$$|K(i\omega)|_{min}\doteq 2\xi k.$$

令(6)式左端等于 k，即得动刚度等于静刚度时的频率为

$$\omega=0,$$

及
$$\omega'=1.414\sqrt{1-2\xi^2}\,\omega_0. \tag{10}$$



例题图 1-8-2

从(8)式知，仅当ζ满足

$$1-2\zeta^2\geqslant 0, \tag{11}$$

即 $$\zeta\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$$

时，才存在ω_c值。记

$$\zeta_{max}=\zeta_c=0.707,$$

则当$\zeta=\zeta_c$时,$\omega_c=0$;当$\zeta>\zeta_c$时，不存在ω_c。

$|K(i\omega)|-\omega$曲线如例题图 1-8-2 所示.

(3) 当结构的$\zeta<\zeta_c$时，若$\omega<\omega'$，则$|K(i\omega)|<k$；若$\omega>\omega'$，则$|K(i\omega)|>k$。这说明$\omega>\omega_c$以后，系统的动刚度随着外界激励频率的增加而提高。

(4) 结构阻尼系数ζ越大，则动刚度也越大。当$\zeta>\zeta_c$时，对一切$\omega>0$,动刚度均比静刚度大。因此由阻尼系数$\zeta=\dfrac{r}{2\sqrt{km}}$式可知，设计机床结构时，应尽量减少其质量，加大其阻尼系数，以获得较好的动刚度，即在同样动力作用下，位移响应较小。

例题 1-9 例题图 1-9-1 所示无质量小车与两个弹簧和一个粘性阻尼器组成一个振动系统，这是粘弹性材料的经典模型。设系统的初始条件均为零，试求

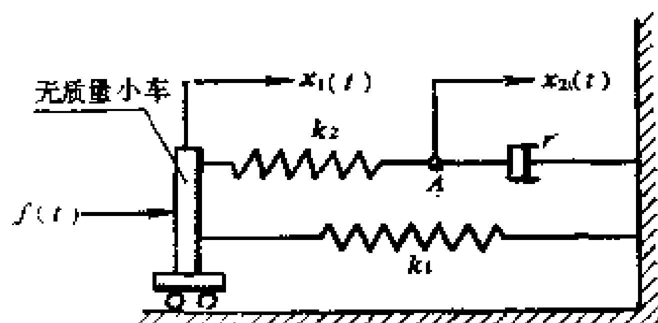
(a) 系统的振动微分方程；

(b) 力激励$f(t)$对位移响应$x_1(t)$的传递函数和动刚度；

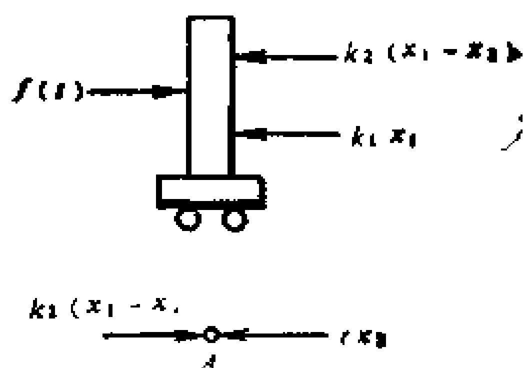
(c) 力激励$f(t)$对位移响应$x_2(t)$的传递函数和动刚度。

解：(1) 列出系统的振动微分方程

分别对节点A和无质量小车画出受力图(见例题图 1-9-2)，应用牛顿定理得



例题图 1-9-1



例题图 1-9-2

$$
\begin{cases}
r\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2), \\
f(t) = k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1.
\end{cases}
\tag{1}
$$

(1) 式为两个一阶微分方程。按二阶微分方程表示单自由度系统来类推，每个一阶方程应表示“半个”自由度。故此振动系统为两个“半自由度”系统。

(2) 对(1) 式进行拉普拉斯变换

$$
\left.
\begin{aligned}
&rsX_2(s) = k_2[X_1(s) - X_2(s)], \\
&F(s) = k_2[X_1(s) - X_2(s)] + k_1 X_1(s).
\end{aligned}
\right\}
\tag{2}
$$

解上式，得

$$
X_1(s) = \frac{(k_2 + rs)F(s)}{(k_1 + k_2)rs + k_1 k_2},
\tag{3}
$$

$$
X_2(s) = \frac{k_2 F(s)}{(k_1 + k_2)rs + k_1 k_2}.
\tag{4}
$$

(3) 力激励 $f(t)$ 对位移响应 x_1 的传递函数和动刚度

根据定义，传递函数为

$$
H_1(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2 + rs}{(k_1 + k_2)rs + k_1 k_2},
\tag{5}
$$

动刚度为

$$
K_1(s) = k_1 + \frac{k_2 rs}{k_2 + rs}.
\tag{6}
$$

(4) 力激励 $f(t)$ 对位移响应 x_2 的传递函数和动刚度

根据定义，传递函数为

$$H_2(s)=\frac{k_2}{(k_1+k_2)rs+k_1k_2},\tag{7}$$

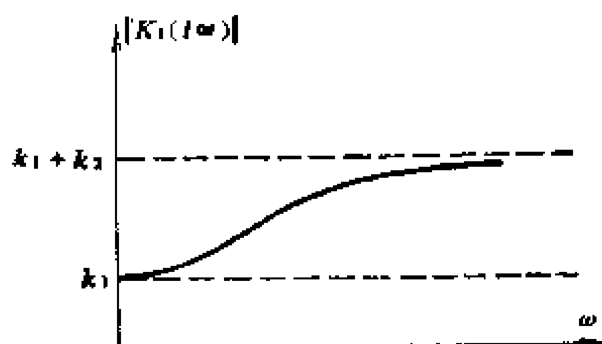
动刚度为

$$K_2(s)=k_1+\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)rs.\tag{8}$$

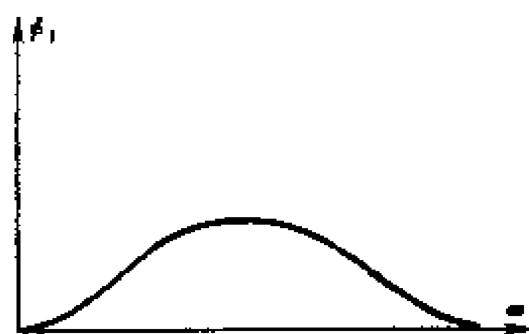
讨论：(1) 令 $s=a+bi$ 中的 $a=0$，$b=\omega$，则动刚度的幅频和相频关系为

$$|K_1(i\omega)|=\left\{\frac{(k_1+k_2)^2r^2\omega^2+k_1^2k_2^2}{k_2^2+r^2\omega^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi_1=\operatorname{tg}^{-1}\left\{\frac{k_2^2r\omega}{(k_1+k_2)r^2\omega^2+k_1k_2^2}\right\}.$$



例题图 1-9-3



例题图 1-9-4

$|K_1(i\omega)|$ 和 ϕ_1 随 ω 变化的曲线如例题图 1-9-3 和 1-9-4 所示，由图可见，

当 $\omega\to0$ 时，$|K_1(i\omega)|\to k_1$，$\phi_1\to0$；

当 $\omega\to\infty$ 时，$|K_1(i\omega)|\to k_1+k_2$；$\phi_1\to0$.

(2) 类似地有

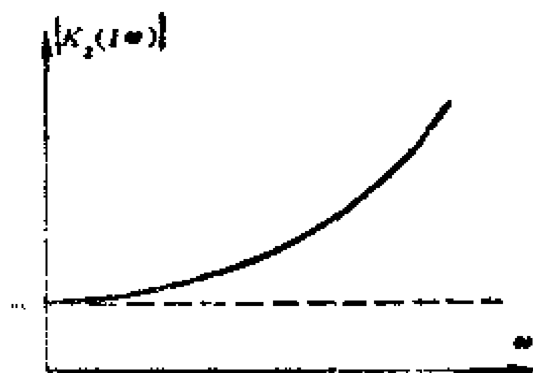
$$|K_2(i\omega)|=\left[k_1^2+\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)^2r^2\omega^2\right];$$

$$\phi_2=\operatorname{tg}^{-1}\left\{\frac{(k_1+k_2)r\omega}{k_1k_2}\right\}.$$

$$当\ \omega \to 0\ 时，\ |K_2(i\omega)| \to k_1,\ \ \phi_2 \to 0;$$

$$当\ \omega \to \infty\ 时，\ |K_2(i\omega)| \to \infty,\ \ \phi_2 \to \frac{\pi}{2}.$$

$|K_2(i\omega)|$和 ϕ_2 曲线分别如例题图 1-9-5 和 1-9-6 所示。



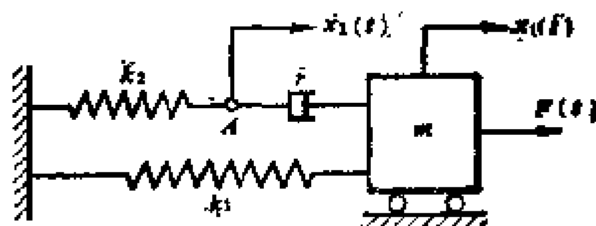
例题图 1-9-5



例题图 1-9-6

例题 1-10 例题图 1-10-1 所示振动系统，各元件的参数都已示出。设初始条件为

$$x_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0.$$

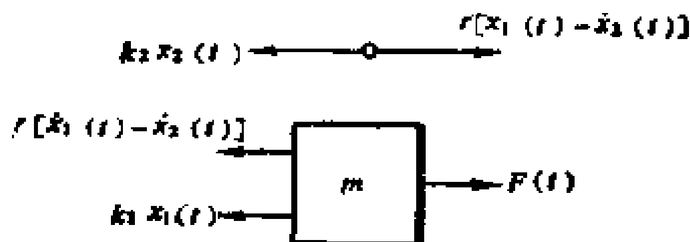


例题图 1-10-1

试求：

(1) 系统振动的微分方程；

(2) 力激励 $F(t)$ 对于位移响应 $x_1(t)$ 的传递函数和动刚度；



例题图 1-10-2

(3) 力激励 $F(t)$对于位移响应 $x_2(t)$ 的传递函数和动刚度。

解：(1) 对结点 A 及质量 m 分别画出受力图（见例题图 1-10-2），应用牛顿第二定律有

$$\left.\begin{aligned} &r[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)]+k_2x_2(t)=0, \\ &m\ddot{x}_1(t)+r[\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)]+k_1x_1(t)=F(t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(1) 式中一个方程是一阶的，一个是二阶的，因而该系统是三阶的，可以认为它具有“一个半”自由度。

(2) 对(1) 式进行拉普拉斯变换

$$\left.\begin{aligned} &rs[X_2(s)-X_1(s)]+k_2X_2(s)=0, \\ &ms^2X_1(s)+rs[X_1(s)-X_2(s)]+k_1X_1(s)=F(s). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

解得

$$X_1(s)=\frac{(rs+k_2)F(s)}{(ms^2+rs+k_1)(rs+k_2)-r^2s^2}, \quad (3)$$

$$X_2(s)=\frac{rsF(s)}{(ms^2+rs+k_1)(rs+k_2)-r^2s^2}. \quad (4)$$

(3) 求传递函数和动刚度

对位移响应 x_1:

$$H_1(s)=\frac{X_1(s)}{F(s)}=\frac{rs+k_2}{(ms^2+rs+k_1)(rs+k_2)-r^2s^2}, \quad (5)$$

$$K_1(s)=(ms^2+rs+k_1)-\frac{r^2s^2}{rs+k_2}. \quad (6)$$

对位移响应 x_2:

$$H_2(s)=\frac{X_2(s)}{F(s)}=\frac{rs}{(ms^2+rs+k_1)(rs+k_2)-r^2s^2}, \quad (7)$$

$$K_2(s)=(ms^2+rs+k_1)\left(1+\frac{k_2}{rs}\right)-rs. \quad (8)$$

讨论：(1) 动刚度 $K_1(s)$和 $K_2(s)$都是复函数，若令复数 $s=a+bi$ 中的实部 $a=0$、虚部$b=\omega$，则(6)、(8) 两式分别为：

$$K_1(i\omega)=(-m\omega^2+ir\omega+k_1)+\frac{r^2\omega^2}{(ir\omega+k_2)}, \quad (9)$$

$$K_2(i\omega)=(-m\omega^2+ir\omega+k_1)\left(1+\frac{k_2}{ir\omega}\right)-ir\omega. \quad (10)$$

由此两式可见，当 $\omega=0$ 时，

$K_1(i\omega)=k_1$，就是静刚度；

$K_2(i\omega)=\infty$，表示在静力作用下，位移 $x_2(t)=0$。

（2）动刚度的复频和相频关系为

$$|K_1(i\omega)|=\left[\left(k_1-m\omega^2+\frac{k_2r^2\omega^2}{k_2^2+r^2\omega^2}\right)^2\left(r\omega-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{r^3\omega^3}{k_2^2+r^2\omega^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

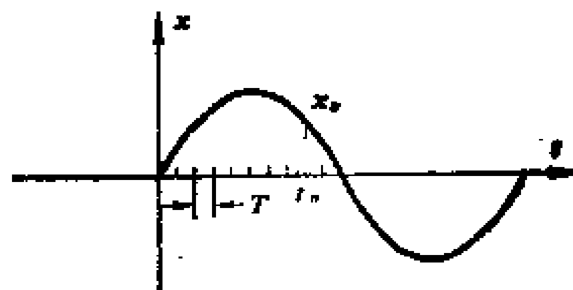
$$\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\{[r\omega(k_2^2+r^2\omega^2)-r^3\omega^3]/[(k_1-m\omega^2)(k_2^2+r^2\omega^2)+k_2r^2\omega^2]\}.$$

$$|K_2(i\omega)|=[(k_1+k_2-m\omega^2)^2+\frac{k_2^2}{r^2\omega^2}(m\omega^2-k_1)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\{k_2(m\omega^2-k_1)/[r\omega(k_1+k_2-m\omega^2)]\}.$$

例题 1-11 求 $x=\sin\omega t(t\geqslant0)$的 Z 变换。

解： 先将函数 $x=\sin\omega t$ 用例题图 1-11-1 表示，然后将该连续信号离散化，取等时间长步为 T，则当 $t=t_n=nT$ 时，x 的离散值为：



例题图 1-11-1

$$x_n=\sin n\omega T=\frac{1}{2i}[e^{in\omega T}-e^{-in\omega T}].$$

$$\because\quad \mathscr{Z}[e^{-i\omega t}]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-in\omega T}z^{-n}$$

$$=1+e^{-i\omega T}z^{-1}+e^{-i2\omega T}z^{-2}+\cdots$$

$$=\frac{z}{z-e^{-i\omega T}},$$

$$\therefore\quad \mathscr{Z}[\sin\omega t]=\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\omega T\cdot z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{in\omega T}-e^{-in\omega T}\right)\right]\cdot z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-i\omega T}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\ \frac{z\left(e^{i\omega T}-e^{-i\omega T}\right)}{z^2-z\left(e^{i\omega T}+e^{-i\omega T}\right)+1}$$

$$=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}.$$

例题 1-12 例题图 1-12-1 所示无质量小车和弹簧 k、阻尼器 r 组成的振动系统受到力 $f(t)$ 的激励，初始条件为 $x(0)=0$，试用 Z 变换法和拉普拉斯变换法求该系统的响应，并比较这两种方法。

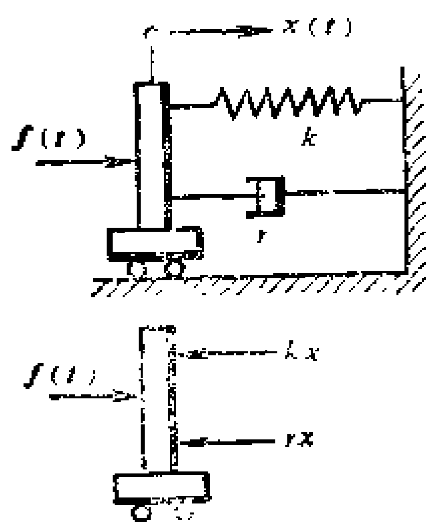
解： 方法 1 Z 变换法

(1) 用牛顿定律建立系统的微分方程：

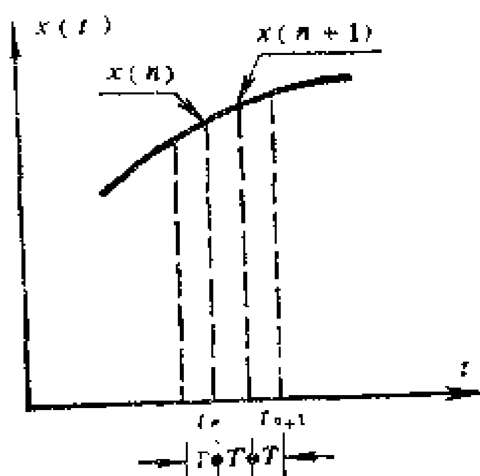
$$r\dot{x}+kx=f(t). \tag{1}$$

(2) 将微分方程变为差分方程

设连续函数 $x(t)$ 如例题图 1-12-2 所示，在间距为 T 的两个时刻 t_n 和 t_{n+1}，其值分别为 $x(n)$ 和 $x(n+1)$。根据导数的定义：



例题图 1-12-1



例题图 1-12-2

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_n}=\lim_{T\to 0}\frac{x(n+1)-x(n)}{T},$$

如果T很小，可近似认为

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_n}\doteq\frac{x(n+1)-x(n)}{T},$$

$[x(n+1)-x(n)]$就称为函数 $x(t)$在 t_n 处的一次差分。

应用 $x(t)$的一次差分，可将(1) 式写成：

$$\frac{r[x(n+1)-x(n)]}{T}+kx(n)\doteq f(n),$$

式中，$f(n)=f(t_n)$.

$$[x(n+1)-x(n)]+\frac{Tk}{r}x(n)\doteq\frac{T}{r}f(n),$$

$$x(n+1)+\left(\frac{Tk}{r}-1\right)x(n)\doteq\frac{T}{r}f(n). \qquad (2)$$

(3) 对差分方程(2) 的左右两边各项进行 Z 变换，得

$$zX(z)-zx(0)+\left(\frac{Tk}{r}-1\right)X(z)=\frac{T}{r}F(z). \qquad (3)$$

又设 $f(t)$是 $t=0$ 时的矩形脉冲，矩形的面积为 1 。脉冲作用的时间是如此之短，以至于不管T多小，恒有

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & (n=0),\\ 0 & (n\neq 0).\end{cases}$$

则

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}=\frac{1}{T}.$$

代入初始条件，由(3) 式解得

$$X(z)=\frac{1/r}{z+\left(\dfrac{Tk}{r}-1\right)}.$$

(4) 求 $x(n)$

因为 $\mathscr{Z}[x(n+1)]=zX(z)=\dfrac{z/\tau}{z+\left(\dfrac{Tk}{\tau}-1\right)}$,

查 Z 变换表（见附录1），有

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right]=a^n,$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad x(n+1)&=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{Tk}{\tau}\right)^n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\\ x(n)&=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{Tk}{\tau}\right)^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

方法 2　拉普拉斯变换法

将(1) 式两边取拉普拉斯变换得

$$\tau[sX(s)-x(0)]+kX(s)=F(s).\quad(6)$$

因为当 $T\to0$时，$f(t)=\delta(t)$，故 $F(s)=1$，代入(6) 式得

$$X(s)=\frac{1}{\tau s+k}.\quad(7)$$

将上式取逆拉普拉斯变换

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[x(s)]=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{k}{\tau}t} & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}\quad(8)$$

由差分方程和Z变换所得的解是近似的，而由拉普拉斯变换得到的是精确解。下面证明，当 $T\to0$ 时，(5)式的极限就是(8)式。

取 $t=t_n=nT$，代入(5)式，并取极限

$$\lim_{T\to0}x(n)=\lim_{T\to0}\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{Tk}{\tau}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{\tau}\lim_{T\to0}\frac{\left(1-\dfrac{Tk}{\tau}\right)^{t_n/T}}{\left(1-\dfrac{Tk}{\tau}\right)}$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[\lim_{T\to 0}\left(1-\frac{Tk}{\tau}\right)^{\frac{1}{T}}\right]^{t_n}$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{k}{\tau}}\right]^{t_n}$$

$$=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{k}{\tau}t_n}. \tag{9}$$

就即 $t=t_n$ 时的(8)式。

讨论：(1) 由上可见，也可以用差分方程结合 Z 变换求振动系统响应的近似解。当然，若激励可用简单的函数形式表达，则应用拉普拉斯变换更简捷些。但若激励是无法用函数式表达的复杂曲线，Z 变换就显出其优点了。

(2) 在(3)式和(6)式中，可以发现 Z 变换和拉普拉斯变换有许多相似之处。实际上，Z 变换是由拉普拉斯变换演变而来的。

例题 1-13 已知函数 $h(t)$ 的拉普拉斯变换为 $H(s)=\frac{k}{s(s+a)}$，式中 $k=0,1,2,\cdots$，a 为常数。试求 $h(t)$ 的 Z 变换。

解：先将$H(s)$写成分部分式，即

$$H(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+a}.$$

易求得
$$A=\frac{k}{a},\quad B=-\frac{k}{a}.$$

$$\therefore\qquad H(s)=\frac{k}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right).$$

从拉普拉斯逆变换知，上式所对应的时域函数为

$$h(t)=\frac{k}{a}(1-e^{-at}),$$

则
$$\mathscr{Z}[h(t)]=\frac{k}{a}\mathscr{Z}[1-e^{-at}]$$

$$=\frac{k}{a}\,\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}.$$

例题 1-14 试求差分方程

$$x(k+2)+2x(k+1)+x(k)=u(k)$$

的解. 式中, $u(k)=k(k=0,1,2,\cdots)$。初始条件为 $x(0)=0$, $x(1)=0$。

解: 方法 1 对差分方程左、右两边各项进行 Z 变换:

$$\mathscr{Z}[x(k+2)]=z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)=z^2X(z),$$

$$\mathscr{Z}[x(k+1)]=zX(z)-zx(0)=zX(z),$$

$$\mathscr{Z}[u(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)z^{-k}=\frac{z}{(z-1)^2}.$$

代入差分方程得

$$z^2X(z)+2zX(z)+X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}, \tag{1}$$

解得

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z+1)^2}. \tag{2}$$

再分解为分部分式

$$X(z)=\frac{1}{4}\left[\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{(z+1)^2}+\frac{z}{z+1}\right]. \tag{3}$$

利用变换公式

$$\mathscr{Z}[a^k]=\frac{z}{z-a}, \quad \mathscr{Z}[k]=\frac{z}{(z-1)^2},$$

$$\mathscr{Z}[(-1)^{k+1}k]=\frac{z}{(z+1)^2},$$

对(3)式进行逆 Z 变换,得差分方程的解为

$$\begin{aligned}x(k)&=\frac{1}{4}[k-1+(-1)^{k+1}\cdot k+(-1)^k]\\&=\frac{1}{4}\{k[1+(-1)^{k+1}]-[1+(-1)^{k+1}]\}\\&=\frac{1}{4}[1+(-1)^{k+1}](k-1)\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{k-1}{2} & (k\ \text{为奇数}), \\ 0 & (k\ \text{为偶数和零}). \end{cases}
$$

方法 2 解得(2)式后，用留数定理求 $X(z)$ 的逆Z变换 $x(k)$：

$$
x(k)=\sum_{m}\mathrm{Res}[X(z)\cdot z^{k-1}]_{z=z_m}.
$$

∵ $X(z)\cdot z^{k-1}=\dfrac{z^k}{(z+1)^2(z-1)^2}$,

∴ 当 $k\geqslant 0$ 时，有两个二阶极点，$z_1=-1$ 和 $z_2=1$。

$$
\mathrm{Res}[X(z)\cdot z^{k-1},-1]
$$

$$
=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z^k}{(z+1)^2(z-1)^2}\right]
$$

$$
=\lim_{z\to -1}\left[\frac{kz^{k-1}\cdot(z-1)^2-2z^k(z-1)}{(z-1)^4}\right]
$$

$$
=\frac{(-1)^k(1-k)}{4},
$$

$$
\mathrm{Res}[X(z)\cdot z^{k-1},1]=\lim_{z\to 1}\left[\frac{kz^{k-1}\cdot(z+1)^2-2z^k(z+1)}{(z+1)^4}\right]
$$

$$
=\frac{k-1}{4}.
$$

$$
\therefore\quad x(k)=\frac{(-1)^k(1-k)+(k-1)}{4}
$$

$$
=\frac{(k-1)[(-1)^{k+1}+1]}{4}
$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{k-1}{2} & (k\ \text{为奇数}), \\ 0 & (k\ \text{为偶数和零}). \end{cases}
$$

例题 1-15 已知对某非线性系统

$$y(t)=a_1x+a_2x^2$$

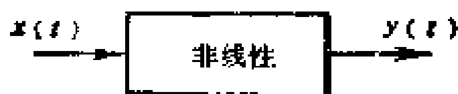
的激励是由两个沃尔什波组成的信号：

$$x(t)=\mathrm{WAL}(r,t)+\mathrm{WAL}(s,t),$$

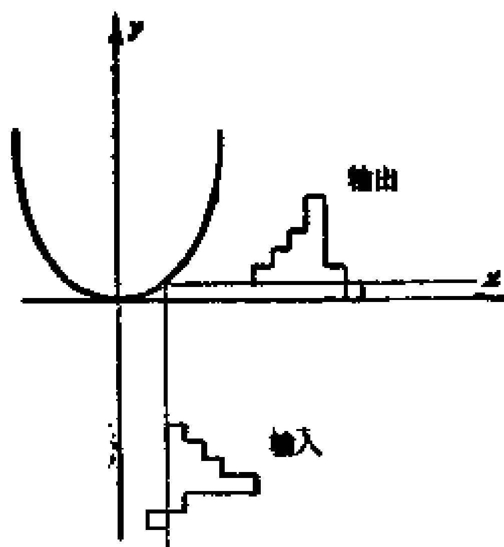
如例题图 1-15-1 所示。试求沃尔什变换后的波形和跨越次数。

解：将 $x(t)$代入 $y(t)$，得

$$y(t)=a_1[\mathrm{WAL}(r,t)+\mathrm{WAL}(s,t)]+a_2[\mathrm{WAL}^2(r,t)+\mathrm{WAL}^2(s,t)-2\,\mathrm{WAL}(r,t)\,\mathrm{WAL}(s,t)].$$



例题图 1-15-1



例题图 1-15-2

利用相乘原理：

$$\mathrm{WAL}(r,t)\cdot\mathrm{WAL}(s,t)=\mathrm{WAL}(r\oplus s,t),$$

得 $$y(t)=a_1[\mathrm{WAL}(r,t)+\mathrm{WAL}(s,t)]+a_2[2\,\mathrm{WAL}(0,t)+2\,\mathrm{WAL}(r\ominus s,t)]$$

$$=2\,a_2\mathrm{WAL}(0,t)+a_1[\mathrm{WAL}(r,t)+\mathrm{WAL}(s,t)]+2\,a_2\,\mathrm{WAL}(r\oplus s,t),$$

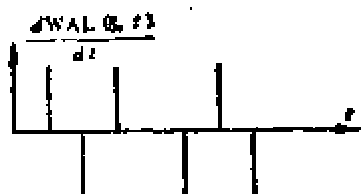
式中 $r\oplus s$ 是指用二进制表示的 r 和 s 这二数在每个对应位上分别独立进行模二和。例如，$n=1011$，$m=0110$，则 $n\oplus m=1101$。上式右边第一项为静态分量，第二项为所需的分量，第三项为交叉调制分量。

讨论：输出的跨越次数与输入一样，只不过幅值改变了（见例题图 1-15-2）。这就是沃尔什变换的特点——抗干扰性强。

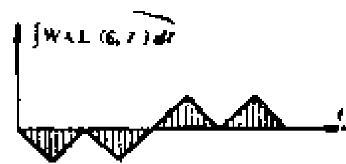
例题 1-16　已知阿达玛矩阵$[H_8]$的某行是一个跨越零点次数等于 6 的沃尔什波（见例题图 1-16-1）。试求它微分和积分以后的图形。



例题图 1-16-1



例题图 1-16-2



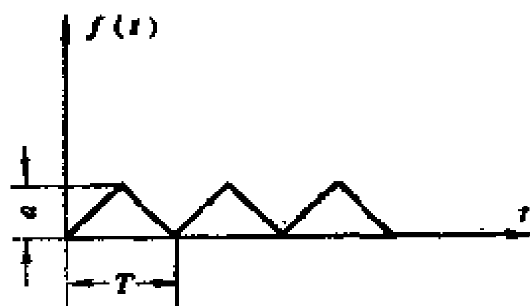
例题图 1-16-3

解：此沃尔什波微分后变为离散型的时域函数（见例题图 1-16-2），而积分后变为非矩形波（见例题图 1-16-3）。

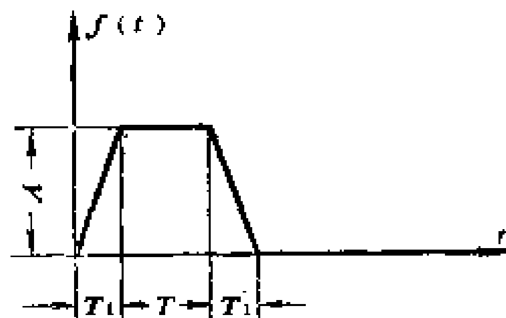
讨论：沃尔什波的微分与积分和正弦波完全不同，波形有明显的变化。而正弦波微分与积分之后，仍是正弦波，只不过移动了一个相位。

第一章习题

习题 1-1 已知习题图 1-1 所示三角形波在 $t>0$ 时出现。



习题图 1-1



习题图 1-2

(a) 若波形延伸至 $t\to\infty$ 处，求其付里叶级数；

(b) 若波形在 $t=T$ 处终止，求其付里叶变换；

(c) 两者的频谱有何不同？试通过此例说明付里叶级数和付里叶变换的联系和区别。

答案：(a) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{4a}{\pi^2}\left\{\cos\omega t+\dfrac{\cos 3\omega t}{3^2}+\dfrac{\cos 5\omega t}{5^2}+\cdots\right\}$.

$$(b)\ F(\omega)=\frac{2a}{\pi T\omega^2}e^{-j\frac{\omega T}{4}}\left(1-\cos\frac{\omega T}{2}\right).$$

习题 1-2 求图示梯形波锤击的付里叶变换，画出幅值频谱图。并由此推出矩形脉冲和三角形脉冲的付里叶变换(提示：分别令梯形脉冲的 T,

$=0$ 及 $T=0$ 即可)。

答案：

对梯形脉冲：

$$F(\omega)=\frac{A}{2\pi T_1\omega^2}\left[e^{-i\omega T_1}-1+e^{-i\omega(T+T_1)}-e^{-i\omega(T+2T_1)}\right].$$

对矩形脉冲：

$$F(\omega)=\frac{A}{2\pi i\omega}(1-e^{-i\omega T}).$$

对三角形脉冲：

$$F(\omega)=\frac{A}{\pi T_1\omega^2}e^{-i\omega T_1}(1-\cos\omega T_1).$$

习题 1-3 将下列函数分解为偶函数和奇函数，并分别作图：

$$h(t)=\begin{cases}1 & (-1<t<0),\\ t+1 & (0<t<1),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

答案：$E(t)=\begin{cases}\dfrac{|t|}{2}+1 & (|t|<1),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$

$$O(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2} & (|t|<1),\\ 0 & (\text{其它})。\end{cases}$$

习题 1-4 确定下列函数付里叶变换的实部和虚部：

$$h(t)=\begin{cases}-A & (t<0),\\ 0 & (t=0),\\ A & (t>0).\end{cases}$$

答案：$A(\omega)=0$，$B(\omega)=-A/\pi\omega$。

习题 1-5 求下列脉冲函数付里叶变换的振幅谱 $|H(f)|$ 和相位谱 $\theta(f)$：

(a) $h(t)=\dfrac{1}{t}\quad(-\infty<t<\infty)$；

(b) $h(t)=A\sin(2\pi f_0 t)$.

答案：(a) $|H(\omega)|=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (\omega\neq 0),\\ 0 & (\omega=0);\end{cases}\qquad \theta(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & (\omega>0),\\ \dfrac{\pi}{2} & (\omega<0).\end{cases}$

(b) $|H(f)|=\frac{A}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$,

$$\theta(f)=-\frac{\pi}{2}.$$

习题 1-6 求下列各函数的付里叶逆变换：

(a) $H(f)=\frac{a^2}{a^2+(2\pi f)^2} \quad (a>0)$；

(b) $H(f)=\frac{\sin(2\pi fT)\cos(2\pi fT)}{2\pi f}(T>0)$；

(c) $H(f)=\frac{f^6+f^4+af^2+a}{f^6+af^4+af^2+a^2} \quad (a>0)$；

(d) $H(f)=\frac{f^2+a}{f^4+2a} \quad (a>0)$.

答案：

(a) $h(t)=\frac{1}{2}ae^{-a|t|}$； (b) $h(t)=\begin{cases}1/4 & (|T|<2T),\\ 0 & (|T|>0),\end{cases}$

(c) $h(t)=\pi i\exp(-\sqrt[4]{4a}\,\pi|t|)\cos(\sqrt[4]{4a}\pi t)\operatorname{sgn}t+$

$+\exp(-2\pi\sqrt{a}\,|t|)$；

(d) $h(t)=2^{-\frac{5}{4}}a^{-\frac{3}{4}}\pi\exp(-\sqrt[4]{8a}\,\pi|t|)[(a+$

$+\sqrt{2a})\cos(\sqrt[4]{8a}\,\pi|t|)-(a-\sqrt{2a}\sin(\sqrt[4]{8a}\,\pi|t|)]$.

习题 1-7 图示单自由度振动系统，已知质量为 m，弹簧刚度为 k，粘性阻尼系数为 r。又知初始条件 $x(0)=a$，$\dot{x}(0)=b$，其中 a、b 均为常数。试用拉普拉斯变换方法求解振动的微分方程。

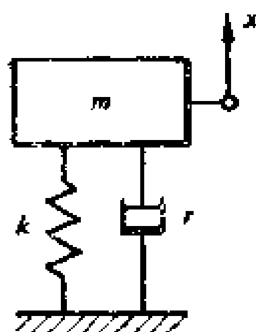
答案：

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\Big[a\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+$$

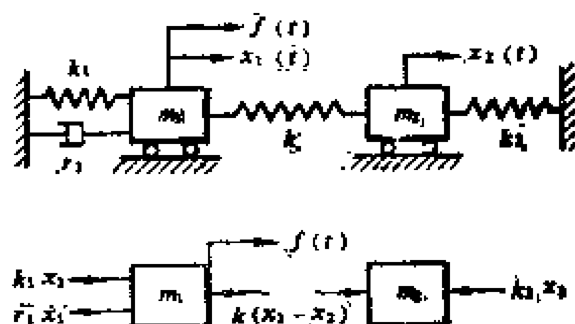
$$+\frac{a\zeta\omega_n+b}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\Big].$$

式中，

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \zeta=r/2\sqrt{km}.$$



习题图 1-7



习题图 1-8

习题 1-8 图示系统的刚度特性和阻尼特性为已知，力激励为$f(t)$。求位移响应 $x_2(t)$的传递函数和动刚度。设系统初始条件均为零。

答案：

$$H_{fx_2}(s)=\frac{X_2(s)}{F(s)}=1\Bigg/\left[\frac{1}{K}(m_1s^2+k_1+k+r_1s)\ (m_2s^2+k_2+k)-k\right],$$

$$K_2(s)=\left[\frac{1}{K}(m_1s^2+k_1+k+r_1s)(m_2s^2+k_2+k)-k\right].$$

习题 1-9 已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$，求时域实函数 $x(kT)$。

答案：

$$x(kT)=2^k-(1+k)\qquad(k=1,2,3\cdots r).$$

习题 1-10 求 $X(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ 的反变换，并用留数定理证明所得结果的正确性。

答案：

$$x(nT)=10(2^n-1)\qquad\qquad(n=0,1,2\cdots).$$

习题 1-11 求 $h(t-kT)$的 z 变换，其中 $h(t)$为线性系统的脉冲响应函数。

答案：

$$\mathscr{Z}[h(t-kT)]=z^{-k}\mathscr{Z}[h(t)]-z^{-k}h(0)-z^{-k-1}h(T)-\cdots$$
$$-z^{\ 2k+}h(kT-T).$$

习题 1-12　已知 $h(t)$ 的拉普拉斯变换为 $H(s)=\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$，式中 ω_n 为固有频率，试求 $h(t)$ 的 Z 变换 $H(z)$。

答案：

$$H(z)=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}.$$

习题 1-13　若二阶微分方程为

$$y''(t)+ay'(t)+by(t)=x(t),$$

试写出用于求微分方程数值解的差分方程，式中 a、b 是常数。

答案：用中央差分，得

$$\frac{1}{T^2}[y(n+1)-2y(n)+y(n-1)]+\frac{a}{2T}[y(n+1)-y(n-1)]+$$
$$+by(n)=x(n),$$

式中，T 为时间间隔；$y(n-1)$，$y(n)$，$y(n+1)$分别为函数 $y(t)$在 t_{n-1}，t_n，t_{n+1}的值；$x(n)$为 $x(n)$在 t_n 时的值。

习题 1-14　已知三阶微分方程为

$$y'''+ay''+by'+cy=x(t),$$

试写出用于求微分方程数值解的差分方程。

答案：用中央差分，得

$$\frac{1}{2T^3}[y(n+2)-2y(n+1)+2y(n-1)-y(n-2)]+\frac{a}{T^2}[y(n+1)$$
$$-2y(n)+y(n-1)]+\frac{b}{2T}[y(n+1)-y(n-1)]+cy(n)$$
$$=x(n),$$

各符号的意义参见上题。

习题 1-15　证明一个偶函数和奇函数的付里叶变换分别是一个实函数和虚函数。

习题 1-16　已知

$$f(t)=\begin{cases}A\cos at & \left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

当 (a) $T=\frac{\pi}{a}$，(b)$T=\frac{3\pi}{a}$，(c)$T=\frac{5\pi}{a}$，(d) $T\to\infty$时，求其付里叶

变换并绘图。

答案：

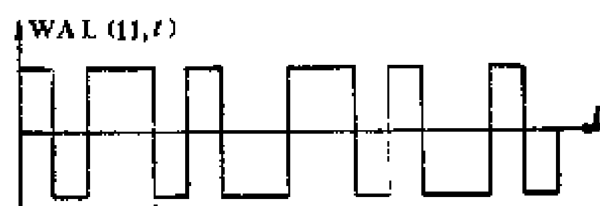
$$(a)\quad F(\omega)=\frac{aA}{\pi(a^2-\omega^2)}\cos\frac{\omega\pi}{2a},$$

$$(b)\quad F(\omega)=\frac{-aA}{\pi(a^2-\omega^2)}\cos\frac{3\omega\pi}{2a},$$

$$(c)\quad F(\omega)=-\frac{aA}{\pi(a^2-\omega^2)}\cos\frac{5\omega\tau}{2a},$$

$$(d)\quad F(\omega)=\frac{A}{2}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)].$$

习题 1-17　已知阿达玛矩阵$[H_{16}]$的某行是一跨越零点次数等于11的沃尔什波，试求它微分和积分后的图形。



习题图 1-17

参 考 文 献

[1] E.O.勃赖姆，快速富里叶变换，上海科学技术出版社，1979。

[2] 绪方胜彦，现代控制工程，科学出版社，1978。

[3] E.J.默斯，变换方法及其在工程和运筹学中的应用，人民教育出版社，1980。

[4] K.G.皮伍斯汉伯，沃尔什函数及其应用，科学出版社，1980。

第二章 随机变量幅域和时域的描述以及可靠性设计

在随机振动中，通常激励和响应都是随机过程，它们包含着许多域的信息。原始振动信号虽然可以提供一些信息，但往往是有限的，不能满足分析随机振动特征的需要；另一方面，近年来信号处理技术和仪器已得到很大发展，因而有必要也有可能对一

		数学名称	物理含义
幅域	$P(x)$	累积概率分布函数	随机变量X小于某特定值x的或然率
	$p(x)$	概率密度函数	连续型随机变量在各幅值上或然率的分布密度
	Prob $(a<x<b)$	概率	随机变量的幅值比b小比a大的或然率
时域	m_x	数学期望（一次矩）	静态量
	σ_x	标准偏差	动态量（偏离期望值的程度）
	D_x	方差（二次中心矩）	动态的"能量"
	$E[x^2]$	均方值（二次矩）	总能量或广义"能量"
	$\sqrt{E[x^2]}$	均方根值	广义"能量"开方根
	$S=\dfrac{E[\mathring{x}^3]}{\sigma_x^3}$	偏态（三次中心矩）	随机变量分布是否对称
	$E=\dfrac{E[\mathring{x}^4]}{\sigma_x^4}$	峰度（四次中心矩）	分布曲线顶峰突起程度

个产品各种响应的振动信号进行处理，使之得到各种域——如幅域、时域、时差域、频域、转角域、倒频域、累积频次域等的信息。

在这些信息中，幅域和时域的信息比较重要，也用得最多，它们从数值上提供判断和分析振动的重要资料，而且又是可靠性设计的重要计算量。兹将这些信息列表如上。

一、内 容 提 要

1. 幅域的描述

以振动量的幅值为横坐标来描述振动的特征。其主要信息函数有：

(1) 累积概率分布函数

随机变量$X[t_1]$小于某个特定值 x 的概率 Prob $[X(t_1)\leqslant x]$ 为

$$P(x,t_1)=\text{Prob}[X(t_1)\leqslant x], \tag{2-1}$$

称累积概率分布函数，简称概率分布函数。对于平稳随机过程，此函数与时间无关，即有

$$P(x,t)=P(x).$$

概率分布函数具有如下性质：

(a) $P(x)$是不减函数；

(b) $P(-\infty)=0$，$P(\infty)=1$；

(c) $0\leqslant P(x)\leqslant 1$.

对于各态历经的随机过程，$P(x)$ 可从任选的一个样本函数，按如下公式计算：

$$P(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{\sum\Delta t_i}{T}, \tag{2-2}$$

式中 T 为所考虑的时间长度（或波形的截断时间）；$\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots$ 是 $x(t)$的幅值小于 x 的各段时间，见图 2-1。

(2) 概率密度函数

随机变量 $x(t)$在给定幅值上的分布密度称为概率密度函数，记作$p(x)$，它是概率分布函数的导数，即

$$p(x)=\frac{dP}{dx}. \qquad (2\text{-}3)$$

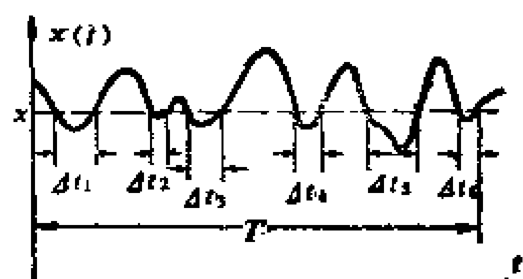


图 2-1

它具有如下性质：

(a) 是非负函数，即 $p(x)\geqslant 0$；

(b) 在幅域上曲线所覆盖的面积等于1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1;$$

(c) $p(-\infty)=0$，$p(\infty)=0$；

(d) 随机变量X落在小区间 $(x,x+dx)$上的概率近似为

$$\text{Prob}(x\leqslant X(t)\leqslant x+dx)\doteq p(x)dx. \qquad (2\text{-}4)$$

许多实际问题的概率密度函数均可认为是正态分布

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}}, \qquad (2\text{-}5)$$

式中m_x、σ_x为随机变量在时域中的期望值和标准离差。

(3) 联合概率分布函数和概率密度函数

随机变量X和Y同时落在区域$(-\infty,x)$和$(-\infty,y)$ 内的概率，即

$$P(x,y)=\text{Prob}[X(t)\leqslant x,\ Y(t)\leqslant y], \qquad (2\text{-}6)$$

称为随机变量X和Y的二维联合概率分布函数，它也具有若干与一维概率分布函数类似的性质。

两随机变量X，Y在给定点上的分布密度称为二维概率密度函数。它是二维概率分布函数的二阶偏导数，即

$$p(x,y)=\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (2\text{-}7)$$

它具有如下性质：

(a) $p(x,y) \geqslant 0$;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy = 1$;

(c) $P(-\infty,y)=0$, $P(x,-\infty)=0$, $P(\infty,\infty)=1$;

(d) $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy$, $p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx$.

随机变量X，Y落在$(x,x+dx)(y,y+dy)$面积上的概率近似为

$$\text{Prob}(x \leqslant X(t) \leqslant x+dx,\ y \leqslant Y(t) \leqslant y+dy) \doteq p(x,y)dxdy. \tag{2-8}$$

在一般情况下，联合分布函数和联合概率密度函数很难用数学式子表达，但在二维正态分布的情况下，其概率密度函数可表示为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{1-\rho_{xy}^2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}, \tag{2-9}$$

式中 m_x、m_y分别为随机变量X和Y的均值；

σ_x、σ_y分别为随机变量X和Y的标准离差；

$\rho_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$为互相关系数，又称标准化协方差；

$C_{xy}=E[(x-m_x)(y-m_y)]$称为协方差或相关矩。

(4) 上述这些函数可按以下步骤求得：

(a) 在各态历经过程的一个样本曲线中，考虑足够长的时间T内的一段波形。画一条平行于时间轴且相距为x的水平线。

(b) 用几何关系求出$x(t)$在水平线以下的各个时间区间，应用（2-3）式计算概率分布函数。

(c) 将概率分布函数微分，求出概率密度函数。

(d) 分别作出概率分布函数和概率密度函数图。

2．时域的描述

概率分布函数固然可以描述随机变量的特征，但是在实际问题中，当并不需要知道随机变量的全部统计特性，或者不易得到概率分布函数时，寻求随机变量的某些重要的非随机特征来近似地代替随机变量的全部统计特性，有着重要意义。一般随机变量分布函数最本质的特征是随机变量的均值、方差或均方值等。它们都以振动的时间为横坐标，所以又属于时域描述。其概率特征信息有：

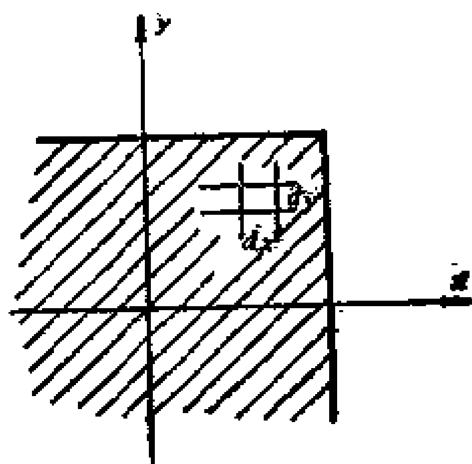


图 2-2

(1) 数学期望（又称集合平均值、均值、一次矩）

$$m_x = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \qquad (2\text{-}10)$$

对各态历经过程，此值可由一个样本函数的时域平均求得，即

$$m_x = E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t) dt. \qquad (2\text{-}11)$$

(2) 均方值（二次矩）

$$\psi_x^2 = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx. \qquad (2\text{-}12)$$

对各态历经过程，此值可由一个样本函数在各时刻幅值平方的平均来计算：

$$\psi_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t) dt. \qquad (2\text{-}13)$$

(3) 方差（二次中心矩）

$$\sigma_x^2 = E[\{x(t) - m_x\}^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx. \qquad (2\text{-}14)$$

σ_x 称为标准离差。对各态历经过程，

$$\sigma_x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(x-m_x)^2dt. \tag{2-15}$$

(4) 时域各概率特征信息间的关系

$$\sigma_x^2=\psi_x^2-m_x^2. \tag{2-16}$$

3. 概率特征值的计算方法

对于波形较规则的各态历经过程，上述概率特征的数值计算可用以下两种方法：

(1) 时间平均法

(a) 将一个样本函数的时域信号表示成时间的函数。

(b) 截取时间间隔T。若波形是周期性的，则T等于其周期；若波形是非周期性的，则T应趋于无穷大。

(c) 分别应用(2-11)、(2-13)式进行积分求m_x和ψ_x^2，然后用(2-16)式求σ_x^2。

(2) 求矩法

(a) 考虑某随机过程各个样本函数在同一时刻t的值，此值随样本而异，是随机变量。此法的关键是确定最原始的随机变量及其概率密度函数。

(b) 用(2-10)式计算m_x，用(2-12)式计算ψ_x^2。

(c) 用(2-16)式求σ_x^2。

4. 随机变量的代数运算

在工程上，一个随机变量常常是另一些随机变量线性或非线性组合的函数，因而随机变量的代数运算规则显得十分有用。

设A、B、C都是随机变量，且B、C是独立无关的。m_A、m_B、m_C为A、B、C的均值，σ_A、σ_B、σ_C为对应的标准离差，则有：

(1) 加法

若　$A=B+C$，则

$$\begin{cases} m_A=m_B+m_C; \\ \sigma_A=\sqrt{\sigma_B^2+\sigma_C^2} \end{cases}. \tag{2-17}$$

在 C 为常数的特殊情况，$m_A = m_B + C$；$\sigma_A = \sigma_B$。

(2) 减法

若 $A = B - C$，则

$$\begin{cases} m_A = m_B - m_C; \\ \sigma_A = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_C^2} \end{cases} \tag{2-18}$$

注意：上式表示的减法标准离差计算公式与加法相同。

(3) 乘法

若　$A = B \cdot C$，则

$$\begin{cases} m_A = m_B \cdot m_C; \\ \sigma_A = \sqrt{m_B^2\sigma_C^2 + m_C^2\sigma_B^2 + \sigma_B^2\sigma_C^2} \end{cases} \tag{2-19}$$

若　$\sigma_B \ll m_B$，$\sigma_C \ll m_C$，则上式近似为

$$\sigma_A \doteq \sqrt{m_B^2\sigma_C^2 + m_C^2\sigma_B^2}. \tag{2-20}$$

在 C 为常数的特殊情况：$m_A = Cm_B$；$\sigma_A = C\sigma_B$。

以下三个公式仅适用于随机变量 B，C 服从正态分布，且 $\sigma_B \ll m_B$，$\sigma_C \ll m_C$ 的情况。

(4) 除法

若　$A = B/C$，则

$$\begin{cases} m_A \doteq m_B/m_C; \\ \sigma_A \doteq \dfrac{1}{m_C^2}\sqrt{m_C^2\sigma_B^2 + m_B^2\sigma_C^2}. \end{cases} \tag{2-21}$$

(5) 平方

若　$A = B^2$，则

$$\begin{cases} m_A = m_B^2 + \sigma_B^2 \doteq m_B^2; \\ \sigma_A = \sqrt{2\sigma_B^4 + 4\sigma_B^2 m_B^2}. \end{cases} \tag{2-22}$$

近似有

$$\sigma_A \doteq 2\,m_B\sigma_B. \tag{2-23}$$

(6) 立方

若　$A = B^3$，则

$$m_A = m_B^3 + 3\, m_B \sigma_B^2 \doteq m_B^3; \qquad (2\text{-}24)$$

$$\sigma_A = \sqrt{15\, \sigma_B^6 + 36\, \sigma_B^4 m_B^2 + 9\, \sigma_B^2 m_B^4}. \qquad (2\text{-}25)$$

近似有

$$\sigma_A \doteq 3\, m_B^2 \sigma_B. \qquad (2\text{-}26)$$

5. 可靠性设计及其准则

可靠性的定义是，产品在规定条件下和规定时间内完成规定功能的性质。衡量可靠性的尺度有多种，其中无故障发挥规定功能的概率为**可靠度**。若振动系统的参数（如质量，激励频率等）是随机变量，则系统某种工作状态的可靠性（例如不发生某阶共振的概率）需要用带概率的可靠度来表示。设计者要在保证系统正常工作的概率达到某一预定值的前提下，确定系统参数的概率特征(均值，标准离差等)。这种设计方法称为**可靠性设计**。

在可靠性设计中，经常碰到的是正态分布的或接近于正态分布的随机变量，不难证明，标准离差为 σ 的正态随机变量 $x(t)$ 落在给定区域内的概率分别为：

$$\begin{cases} \text{Prob}(-\sigma \leqslant x(t) \leqslant \sigma) = 0.6828; \\ \text{Prob}(-2\,\sigma \leqslant x(t) \leqslant 2\,\sigma) = 0.9544; \\ \text{Prob}(-3\,\sigma \leqslant x(t) \leqslant 3\,\sigma) = 0.9974; \\ \text{Prob}(-4\,\sigma \leqslant x(t) \leqslant 4\,\sigma) = 0.999936. \end{cases} \qquad (2\text{-}27)$$

由上式可知，通常采用的“3 σ”准则可使系统工作的可靠度达到99.74%。对于要求特别高的精密系统，例如航天用的控制部件，则要求“四九”设计，即可靠度为99.99%。虽然可靠性设计不能百分之百地保证系统不出故障，但实际上，可以认为概率很小的事件是不会发生的。

二、例　　题

例题 2-1　已知概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} ax + b & (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

试求允许的 a、b 值。

解：因为 $p(x)$是非负函数，所以有

$$b \geqslant 0, \tag{1}$$

$$a+b \geqslant 0. \tag{2}$$

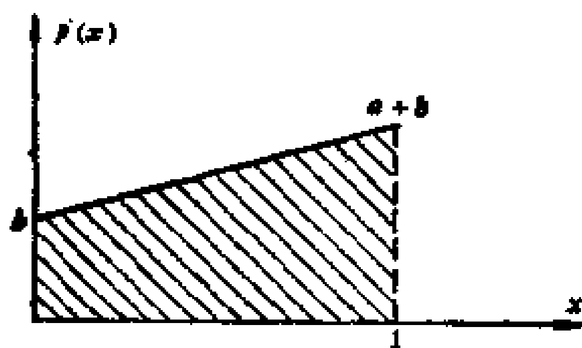
画出 $p(x)$的曲线，如例题图 2-1-1 所示。此外还必须满足条件 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1$，即

$$\int_0^1 (ax+b)dx = \left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)\Bigg|_0^1 = \frac{a}{2}+b=1. \tag{3}$$

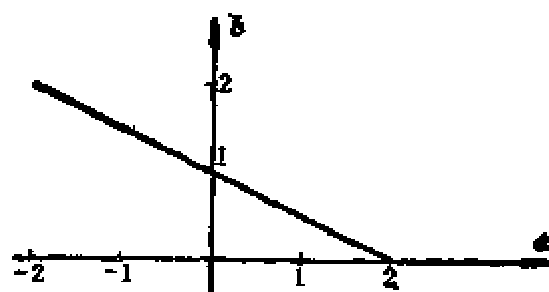
由(2)和(3)式解得

$$b \leqslant 2. \tag{4}$$

所以，a、b 的允许值可用直线 $\frac{a}{2}+b=1$ 在 $0 \leqslant b \leqslant 2$ 范围内的线段来表示，如例题图 2-1-2 所示。



例题图 2-1-1



例题图 2-1-2

例题 2-2 已知累积概率分布函数为

$$P(x)=\begin{cases} 0 & (x<0), \\ 2x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right), \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{4}< x \leqslant \frac{3}{4}\right), \\ 2\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2} & \left(\frac{3}{4}< x \leqslant 1\right), \\ 1 & (1< x). \end{cases}$$

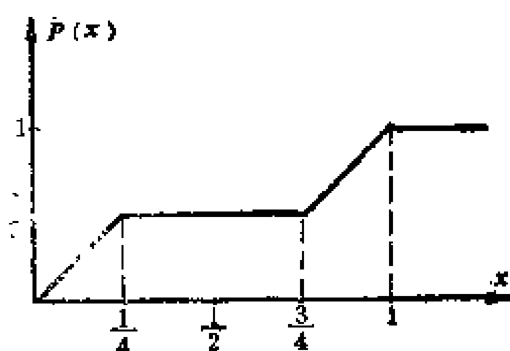
求概率密度函数。

解：将 $P(x)$ 用例题图 2-2-1 表示，从图上可见它是单值连续的不减函数，且有

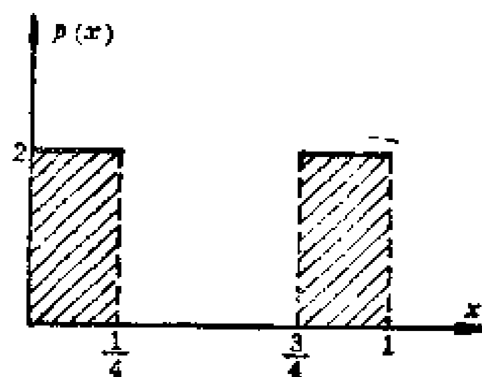
$$P(-\infty)=0,$$
$$P(\infty)=1.$$

分段微分，得

$$p(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ 2 & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\right),\\ 0 & \left(\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{3}{4}\right),\\ 2 & \left(\frac{3}{4}<x\leqslant 1\right),\\ 0 & (1<x).\end{cases}$$



例题图 2-2-1



例题图 2-2-2

如例题图 2-2-2 所示。

讨论：例题图 2-2-2 表明，随机变量 X 只能取区间 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{3}{4},1\right)$ 内的值，且在这两个区间内是均匀分布的。

例题 2-3 已知 $Y=aX^3$，其中 a 是正实常数，随机变量 X 服从标准正态分布

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\quad(-\infty<x<\infty).$$

求 $P_Y(y)$和 $p_Y(y)$。

解：方法 1

$$P_Y(y)=\text{Prob}[Y\leqslant y]=\text{Prob}(aX^3\leqslant y)$$

$$=\text{Prob}\left(X^3\leqslant\frac{y}{a}\right)$$

$$=\text{Prob}\left[X\leqslant\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$=P_X\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \tag{1}$$

再由微分方法求 $p_Y(y)$：

$$p_Y(y)=\frac{dP_Y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}P_X\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$=p_X\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\cdot\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot p_X\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{2}$$

$$\because\quad p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{3}$$

$$\therefore\quad p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3a\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$(-\infty<y<\infty). \tag{4}$$

方法 2

本题因 $Y=aX^3$ 是单调函数，可直接应用下述定理：

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $p_X(x)$，又设 $y=$

$f(x)$处处可导，且对于任意 x 值，恒有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则 $Y=f(X)$是连续型随机变量，其概率密度为：

$$p_Y(y)=\begin{cases}P_X[g(y)]|g'(y)| & (\alpha<y<\beta),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases} \tag{5}$$

其中　$g(y)$是 $f(x)$的反函数，

$$\alpha=\min\{f(-\infty),\ f(+\infty)\}; \tag{6}$$

$$\beta=\max\{f(-\infty),\ f(+\infty)\}. \tag{7}$$

对于本题，显然定理的条件是满足的，求得

$$g(y)=\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{8}$$

$$|g'(y)|=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{a}. \tag{9}$$

故

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{3a\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$$

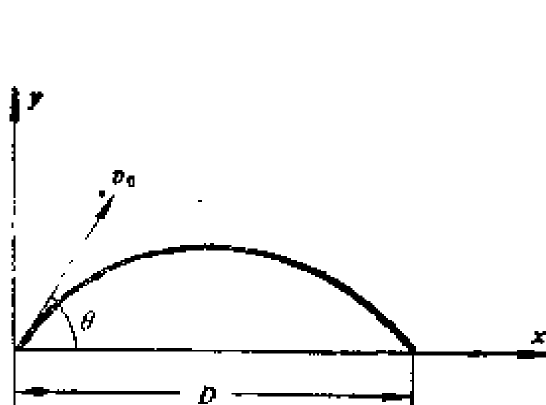
$$(-\infty<y<\infty). \tag{10}$$

讨论：显然 $p(y)$不服从正态分布，原因是Y与X不成线性关系。

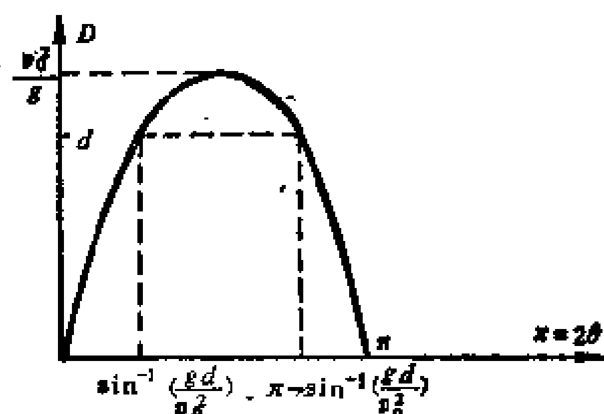
例题 2-4　受重力作用的炮弹从原点射出。已知炮弹的初速度为 v_0（常数），v_0对地面的初始倾角是分布在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$中的随机变量 Θ，如例题图 2-4-1 所示。求炮弹射程D的概率分布函数和密度函数（不计风的阻力，且假定 Θ 在 0到$\frac{\pi}{2}$之间均匀分布）。

解：在任一时刻 t，炮弹在 y 方向的速度为

$$v_y(t)=v_0\sin\theta-gt,$$



例题图 2-4-1



例题图 2-4-2

炮弹在 y 方向的运动规律为

$$y(t)=\int_0^t v_y(t)dt=v_0t\sin\theta-\frac{g}{2}t^2.$$

炮弹落地时的条件为 $y(t)=0$，所以落地时刻为

$$t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}. \tag{1}$$

射程方程为

$$\begin{aligned} d&=v_0\cos\theta\cdot t\\ &=v_0\cos\theta\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

(2)式表示射程 D 是随机变量 Θ 的函数，所以 D 也是随机变量。d 与 2θ 的关系如例题图 2-4-2 所示。

先求射程 D 的概率分布函数 $P(D)$：

$$\begin{aligned} P(D)&=\text{Prob}(D\leqslant d)\\ &=\text{Prob}\left\{0\leqslant 2\Theta\leqslant\sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)\right\}+\\ &\quad+\text{Prob}\left\{\left[\pi-\sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)\right]\leqslant 2\Theta\leqslant\pi\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

因为 Θ 是均匀分布的，所以有

$$p(2\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & (0<2\Theta<\pi),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases} \tag{4}$$

故(3)式正好是上述间隔的长度乘以概率密度函数$\frac{1}{\pi}$：

$$P(D)=\begin{cases}0 & (D<0),\\ \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) & \left(0\leqslant D\leqslant\frac{v_0^2}{g}\right),\\ 1 & \left(D>\frac{v_0^2}{g}\right).\end{cases}\tag{5}$$

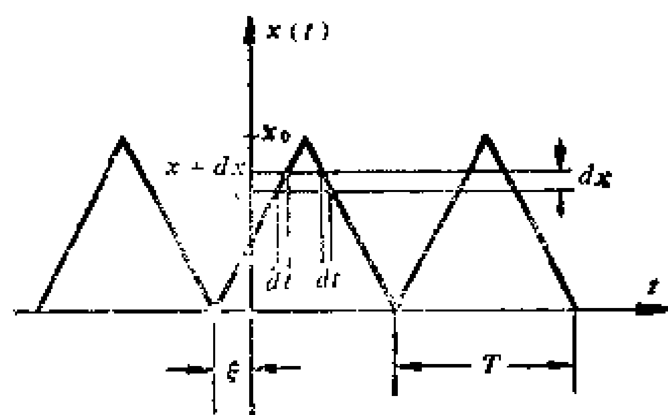
为求概率密度函数，可将(5)式微分：

$$p(D)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2-D^2}} & \left(0\leqslant D\leqslant\frac{v_0^2}{g}\right),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}\tag{6}$$

$$\text{Prob}(D\geqslant d)=1-P(D)=\begin{cases}1 & (D<0),\\ 1-\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) & \left(0\leqslant D\leqslant\frac{v_0^2}{g}\right),\\ 0 & \left(\frac{v_0^2}{g}\leqslant D\right).\end{cases}$$

讨论：由 d 与 2θ 的函数图可知，当 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 弧度时，d 为最大值：

$$d_{\max}=\frac{v_0^2}{g}.$$



例题图 2-5-1

例题 2-5 求图示三角形波的概率分布函数和概率密度函数

解：方法 1

三角形波的形状认为是确定性的，但如果所考虑的时刻 t_0 是随机的，则 $X(t_0)$ 就变成随机变量了。也可以这样来理解：对于多个样本构成的集合来说，若图中的 ξ 值是随机的，则在同一时刻 t_0，各样本的 $X(t_0)$ 值将各不相同，也

是随机变量。

现在从例题图 2-5-1 上可见，波形在一个周期内的方程为：

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{2x_0}{T}(t+\xi) & -\xi\leqslant t<\left(\dfrac{T}{2}-\xi\right), \quad (1)\\[2ex] 2x_0-\dfrac{2x_0}{T}(t+\xi) & \left(\dfrac{T}{2}-\xi\right)\leqslant t<(T-\xi). \quad (2)\end{cases}$$

分别对(1)及(2)式进行微分，得

$$dx=\frac{2x_0}{T}dt \qquad -\xi\leqslant t<\left(\frac{T}{2}-\xi\right), \tag{3}$$

$$dx=-\frac{2x_0}{T}dt \quad \left(\frac{T}{2}-\xi\right)\leqslant t<(T-\xi). \tag{4}$$

(3)式和(4)式也可以合并为：

$$2\frac{|dt|}{T}=\frac{dx}{x_0}. \tag{5}$$

由例题图 2-5-1 可见，$X(t_0)$落在 x 和 $x+dx$ 之间在一个周期内所对应的时间为 $2|dt|$，而 t_0 落在 $2|dt|$内的概率为 $\frac{2|dt|}{T}$，这里 dt 加上绝对值记号是因为在后半个周期中，当 $X(t_0)$从 x 变到 $x+dx$ 时，dt 为负值，因此

$$\text{Prob}[x\leqslant X(t_0)\leqslant x+dx]=\frac{2|dt|}{T}=\frac{dx}{x_0}. \tag{6}$$

又因为上式左边等于 $p(x)dx$，所以

$$p(x)=\frac{1}{x_0} \qquad (0\leqslant x\leqslant x_0). \tag{7}$$

上式说明，x 在区域$[0,x_0]$内是均匀分布的。

累积概率分布函数

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{x_0}dx=\frac{x}{x_0} \qquad (0\leqslant x\leqslant x_0), \tag{8}$$

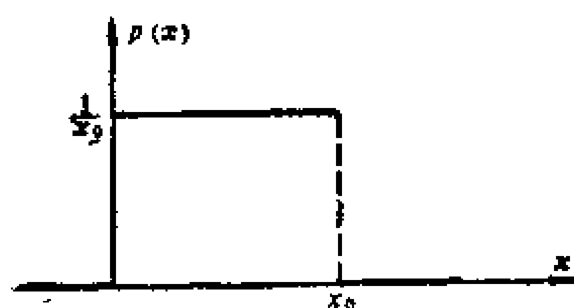
$$\therefore\ P(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ \dfrac{x}{x_0} & (0\leqslant x\leqslant x_0),\\ 1 & (x>x_0).\end{cases}\tag{9}$$

方法 2

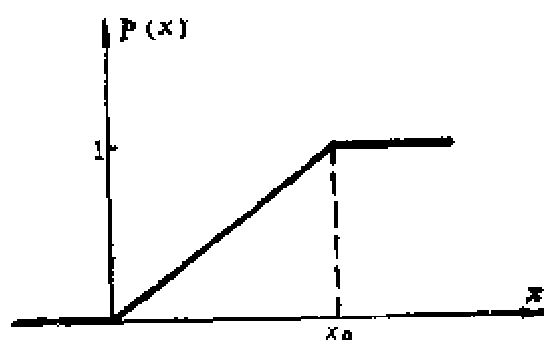
由于不论在前半周期还是后半周期，$X(t)$ 都和 t 成线性关系。不管 X 取区间内的什么值，对于相同的 dx，所对应的 $2|dt|$ 值都相同。因此，$X(t)$ 取区间内任一值的概率都相等，即 $X(t)$ 在$[0, x_0]$内是均匀分布的，故有

$$p(x)=\frac{1}{x_0}\qquad(0\leqslant x\leqslant x_0).\tag{10}$$

由此再计算概率分布函数 $P(x)$。



例题图 2-5-2



例题图 2-5-3

例题 2-6 偏心轮激振器在停机时，偏心轮所处的相位角 Φ 是均匀分布的随机变量

$$p_\Phi(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & (-\pi\leqslant\varphi\leqslant+\pi),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

则起动后任一时刻 t，惯性力在竖轴上的投影 $X(t)=\sin(\omega t-\Phi)$ 也是随机变量，其中 ω 是常数，求 $p(x)$。

解. $X(t)$ 是随机变量 Φ 的函数(在更一般的情况下，ω 也可以是随机变量)。对于 ωt 和 Φ 的每个值，X 的值必定落在 -1

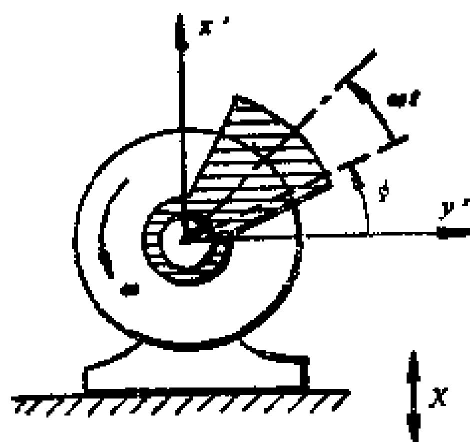
和+1之间，如例题图 2-6-2 所示。

现在讨论 X 取不同值的情况：

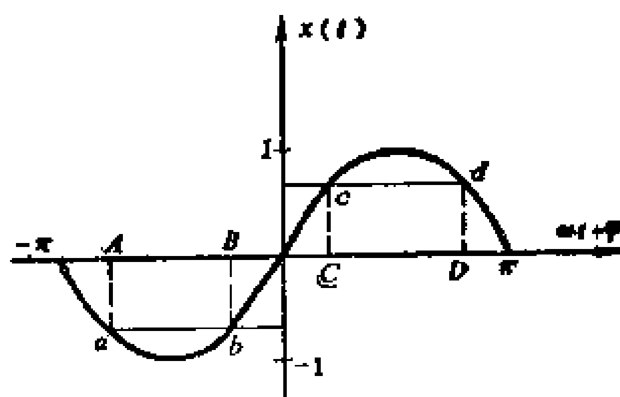
对于 $x<-1$，

$$P(x)=\text{Prob}[X(t)\leqslant x]=0. \tag{1}$$

对于 $-1\leqslant x<0$，过点 x 作平行于横轴的直线，交曲线 $x(t)$ 于 a、b 点，过 a、b 作水平轴的垂线，垂足为 A、B，则当 $\omega t+\varphi$ 在区间 $[A, B]$ 内时，满足 $X(t)\leqslant x$ 的条件，于是



例题图 2-6-1



例题图 2-6-2

$$P(x)=\text{Prob}[X(t)\leqslant x]=\text{Prob}[\sin(\omega t+\Phi)\leqslant x]$$

$$=P[\varphi_1\leqslant\Phi\leqslant\varphi_2]=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi)d\varphi,$$

式中 $\varphi_1=-\pi-\sin^{-1}x-\omega t$，

$\varphi_2=\sin^{-1}x-\omega t$.

故得

$$P(x)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi)d\varphi$$

$$=\int_{-\pi-\sin^{-1}x-\omega t}^{\sin^{-1}x-\omega t}\frac{1}{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}(2\sin^{-1}x+\pi)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sin^{-1}x. \tag{2}$$

对于 $0\leqslant x<1$，与上面类似，可得 c，d，C，D 等点，当 $\omega t+\varphi$ 在区间$[-\pi, C]$和$[D, \pi]$内时，满足 $X(t)\leqslant x$，于是

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \text{Prob}[X\leqslant x] \\
&= \text{Prob}[\sin(\omega t+\Phi)\leqslant x] \\
&= P[-\pi-\omega t\leqslant \Phi\leqslant \varphi_3]+P[\varphi_4\leqslant \Phi\leqslant \\
&\qquad \pi-\omega t],
\end{aligned}
$$

式中 $\varphi_3=\sin^{-1}x-\omega t$，

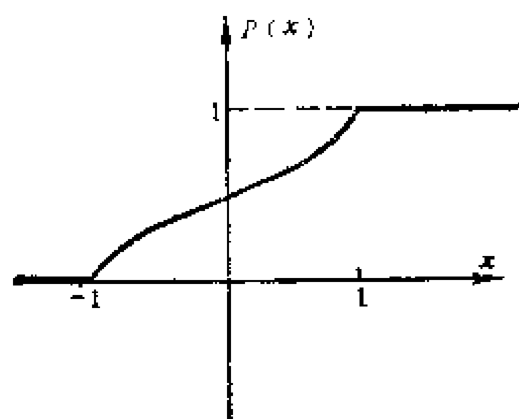
$\varphi_4=\pi-\sin^{-1}x-\omega t$.

故
$$
\begin{aligned}
P(x) &= \int_{-\pi-\omega t}^{\sin^{-1}x-\omega t}\frac{1}{2\pi}d\varphi+\int_{\pi-\sin^{-1}x-\omega t}^{\pi-\omega t}\frac{1}{2\pi}d\varphi \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sin^{-1}x. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

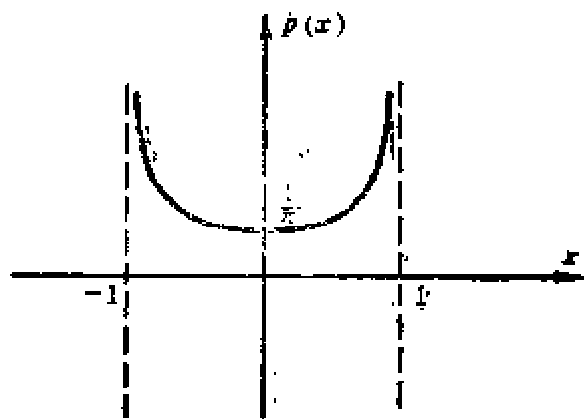
对于 $x\geqslant 1$，$P(x)=1$(因为X在-1和$+1$之间取值)。概括起来得

$$
P(x)=\begin{cases} 1 & (1\leqslant x), \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\sin^{-1}x & (-1\leqslant x\leqslant 1), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases} \qquad (4)
$$

$$
p(x)=\frac{dP(x)}{dx}=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1\leqslant x\leqslant 1), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases} \qquad (5)
$$



例题图 2-6-3



例题图 2-6-4

例题 2-7 随机变量X和Y的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)} & (x\geqslant 0, y\geqslant 0), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

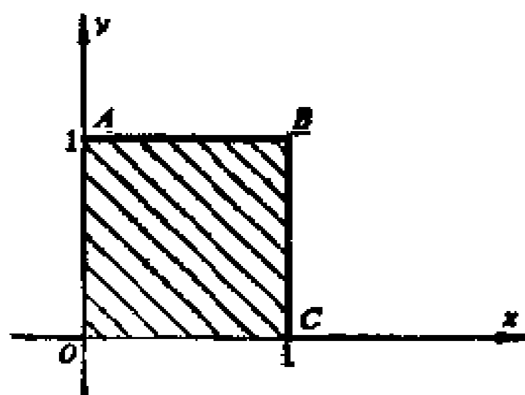
求：(a) a 的值；

(b) $y=1$ 时，$0<x<1$ 的概率；

(c) x 和 y 是否统计无关？

(d) 若X,Y为随机点的坐标，求此点落在例题图 2-7-1 所示面积为 1 的正方形 $OABC$ 外的概率；

(e) 概率分布函数 $P(x,y)$。



例题图 2-7-1

解：(a) 因为$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dxdy=1$，

即
$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}ae^{-(x+y)}dxdy=a=1.$$

(b)
$$\text{Prob}(0<x<1)=\int_{0}^{1}p(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}e^{-(x+1)}dx$$
$$=\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

(c)
$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\int_{0}^{\infty}e^{-(x+y)}dy=e^{-x},$$
$$p(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\int_{0}^{\infty}e^{-(x+y)}dx=e^{-y}.$$

由此得

$$p(x,y)=p(x)\cdot p(y).$$

所以 x 和 y 是不相关的两随机变量。

(d) Prob (x, y 落在 $OABC$ 外)

$$=1-\text{Prob}(x,\ y\text{ 落在}OABC\text{内})=1-\int_0^1\int_0^1 e^{-(x+y)}dxdy$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)^2=\frac{1}{e}\left(2-\frac{1}{e}\right).$$

(e) $$P(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^x\int_0^y e^{-(x+y)}dxdy$$

$$=(1-e^{-x})(1-e^{-y})(x\geqslant 0,y\geqslant 0).$$

例题 2-8 设有两辆坦克，若每辆坦克在行驶时击中敌坦克的概率都是 0.6，且两坦克上的火炮朝同一目标射击，求击中的概率？又欲以 99%的把握，要把敌火力点击中，问需几辆坦克同时射击此目标？

解： 设以 A 表示"敌目标被击中事件"，A_1，A_2 分别表示两辆坦克击中目标的事件。由于各自射击，则此两事件是独立无关的。

先求敌目标未被击中的概率 $P(\bar{A})$，即

$$\bar{A}=\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2.$$

由独立性条件，应用概率乘法公式

$$\begin{aligned}P(\bar{A})&=P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\\&=[1-P(A_1)][1-P(A_2)]\\&=(1-0.6)^2\\&=0.16.\end{aligned}$$

所以敌目标被我坦克击中的概率为

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.16=0.84.$$

设 n 是以 99%的概率击中敌目标需配置的坦克数，由于"第 i 辆坦克未击中敌目标"的事件($\bar{A}_i$)与其它各坦克未击中敌目标

的事件($\bar{A}_1, \cdots, \bar{A}_{i-1}$, $\bar{A}_{i+1}, \cdots$, $\bar{A}_n$)是彼此独立的，而敌目标未被击中，就是 n 辆坦克都未击中，因此，

$$P(\bar{A})=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$$
$$=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$
$$=(0.4)^n.$$

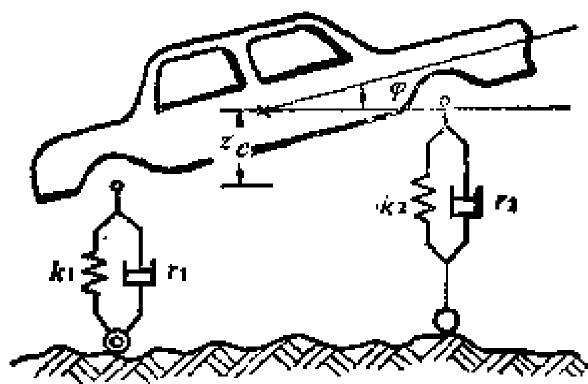
现在要求 $\qquad P(\bar{A})=1-0.99=0.01$,

由此得

$$(0.4)^n=0.01,$$
$$n\lg 0.4=\lg 0.01,$$
$$n=\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}\doteq 5.$$

这就是说要让命中率为 0.6 的五辆坦克同时射击敌目标，则有击中概率为 0.99。

例题 2-9 振动的汽车可简化为两自由度模型，如例题图 2-9-1 所示，它受路面随机激励后的响应 Z_C(质心的纵坐标)和 Φ(转角)都是随机过程。已知它们的联合概率密度函数 $p(z_c,\varphi)$，试求振动量 Z_C 在区间 $z_C\leqslant z_C(t)\leqslant z_C+\Delta z_C$ 内时，另一振动量 Φ 集合平均值的表示式。



例题图 2-9-1

解：应用条件概率公式

$$P(\varphi|z_C\leqslant Z_C(t)\leqslant z_C+\Delta z_C)=\frac{\text{Prob}(\Phi<\varphi, z_C\leqslant Z_C<z_C+\Delta z_C)}{\text{Prob}(z_C\leqslant Z_C<z_C+\Delta z_C)}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi}\int_{z_C}^{z_C+\Delta z_C} p(z_C,\varphi)\,dz_C\,d\varphi}{\int_{z_C}^{z_C+\Delta z_C} p_{z_C}(z_C)\,dz_C},$$

将上式对φ求导数，可得

$$p[\varphi | z_C \leqslant Z_C(t) \leqslant z_C+\Delta z_C]=\frac{\int_{z_C}^{z_C+\Delta z_C} p(z_C,\varphi)\,dz_C}{\int_{z_C}^{z_C+\Delta z_C} p_{z_C}(z_C)\,dz_C}.$$

再求Φ的集合平均值，得

$$E[\Phi | z_C \leqslant Z_C(t) \leqslant z_C+\Delta z_C]=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z_C}^{z_C+\Delta z_C} \varphi\, p(z_C,\varphi)\,d\varphi\,dz_C}{\int_{z_C}^{z_C+\Delta z_C} p_{z_C}(z_C)\,dz_C}.$$

例题 2-10 计算例题图 2-10-1 所示三角形波的均方值。

解：取一个周期T内的时域信号，其函数表达式为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{4A}{T}t & \left(-\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{4}\right),\\[2ex] \dfrac{4A}{T}\left(\dfrac{T}{2}-t\right) & \left(\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{3}{4}T\right).\end{cases} \tag{1}$$

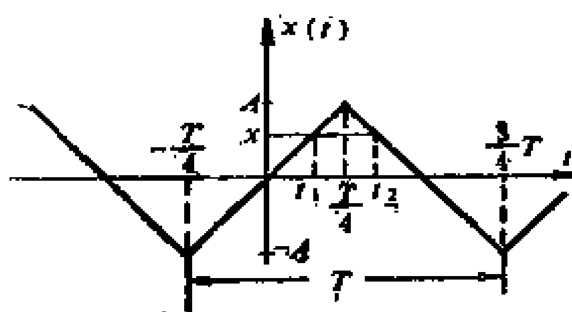
方法 1

应用(2-13)式。由于本题是周期函数，式中的极限记号可去掉，分段积分

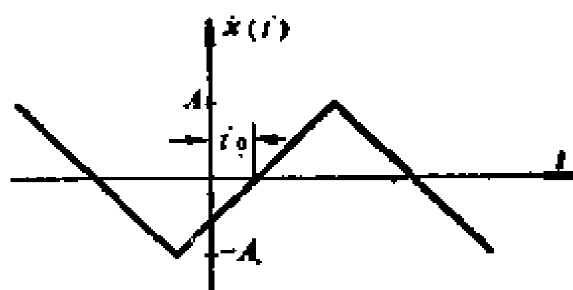
$$\psi_x^2=E[x^2]=\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\frac{16A^2}{T^2}t^2dt+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\frac{16A^2}{T^2}\left(\frac{T}{2}-t\right)^2dt\right],$$

上式右边第二个积分中，令$\left(\dfrac{T}{2}-t\right)=u$，则



例题图 2-10-1



例题图 2-10-2

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\frac{16A^2}{T^2}\left(\frac{T}{2}-t\right)^2dt=\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\frac{16A^2}{T^2}u^2du.$$

$$\therefore\quad \psi_x^2=2\cdot\frac{16A^2}{T^3}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}t^2dt=\frac{1}{3}A^2.$$

方法 2

应用(2-12)式计算。首先要确定 $p(x)$值，为此可仿照例题 2-5 的方法，这一方法也可归纳成下列公式：

$$p(x)=\sum_i\left[\frac{p(t)}{|dx/dt|}\right]_{t=t_i},$$

式中，x 是 t 的函数，即 $x=x(t)$。t_i 是对应于某一 x 值的所有 t 值。如果 $x(t)$是周期函数，则只需考虑一个周期，如例题图 2-10-1 中的 t_1 和 t_2。上式适用于 $x(t)$ 为非单调函数的情况，而例题 2-3 提供的定理，只适用于单调函数。

因为 t 在区间$\left[-\frac{T}{4},\ \frac{3}{4}T\right]$内均匀分布，即

$$p(t)=\begin{cases}\frac{1}{T} & \left(-\frac{T}{4}<t<\frac{3}{4}T\right),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

所以

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{T}\left[\frac{1}{4A/T}+\frac{1}{|4A/(-T)|}\right]=\frac{1}{2A}\\ 0\end{cases}$$

$$(-A\leqslant x\leqslant A),$$
$$(|x|>A).$$

$$E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_{-A}^{A}x^2\frac{1}{2A}dx=\frac{1}{3}A^2.$$

方法 3

考虑 $x(t)$ 的各个样本函数，如例题图 2-10-2 所示，各样本的 t_0 值各不相同，在例题图 2-10-1 上是 $t_0=0$ 的特殊情况。随机变量 T_0 的概率密度函数假定为均匀分布，即

$$p(t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & (0<t_0<T),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

在考虑样本集合时，均方值的定义如下：

$$E[x^2(t)]=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}x^2(t)P_i.$$

式中，N 为样本个数，P_i 为取得第 i 个样本的概率。

既然各样本的区别仅在于 t_0 值，显然 P_i 由取得某 t_0 值的概率决定。将各样本按 t_0 值不同分类，则样本的 T_0 值在范围 $t_0\leqslant T_0\leqslant t_0+dt_0$ 内的概率为：

$$\text{Prob}(t_0\leqslant T_0\leqslant t_0+dt_0)=p(t_0)dt_0.$$

T_0 的变化范围为 0—T。样本这样分类后，上面的求和式可写成

$$E[x^2(t)]=\int_0^T x^2(t)p(t_0)dt_0=\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt_0,$$

令

$$u=t-\frac{T}{4},$$

并略去供鉴别用的下标"0"，得

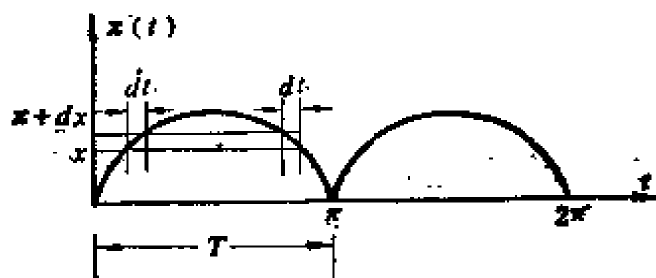
$$E[x^2(t)]=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}x^2(t)dt,$$

这就是方法 1 中用过的原始式子。

例题 2-11 求整流后正弦波的均值、均方值、方差和标准离差。

解：从例题图 2-11-1 可见，整流后正弦波的周期为 π，在 $[0,\pi]$ 内的函数表达式为

$$x = A\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi), \tag{1}$$



例题图 2-11-1

方法 1

先将(1)式二边微分得

$$dt = \frac{dx}{A\cos t},$$

$$\text{Prob}[x \leqslant X(t) \leqslant x + dx] = \frac{2\,dt}{T} = \frac{2\,dx}{\pi A\cos t} = \frac{2\,dx}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}. \tag{2}$$

又(2)式左边等于 $p(x)dx$，所以概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} & (0 \leqslant x \leqslant A), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases} \tag{3}$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx = \int_0^A \frac{2x}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}\,dx = \frac{2A}{\pi}. \tag{4}$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^A \frac{2x^2}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}\,dx = \frac{A^2}{2}. \tag{5}$$

方法 2

对时间求平均值，取$T=\pi$，

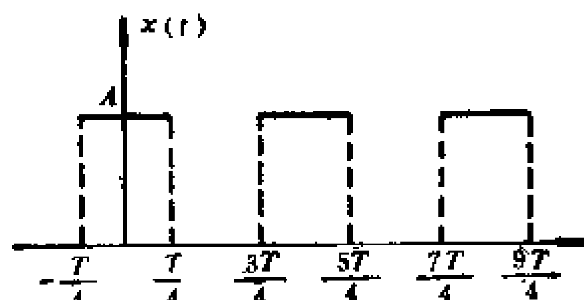
$$m_x=\frac{1}{T}\int_0^T A\sin t dt=\frac{2}{\pi}A.$$

$$\psi_x^2=E[x^2]=\frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2 t\,dt=\frac{A^2}{2}.$$

$$\sigma_x^2=\psi_x^2-m_x^2=\frac{1}{2}A^2-\frac{4}{\pi^2}A^2=0.0947\,A^2,$$

$$\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}=0.308\,A.$$

例题 2-12 **计算例题图 2-12-1 所示方波的均值、均方值、方差和标准离差。**



例题图 2-12-1

解：取图示波形的一个周期，其函数关系为

$$x(t)=\begin{cases}A & \left(-\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4}\right),\\ 0 & \left(\frac{T}{4}<t<\frac{3}{4}T\right).\end{cases} \tag{1}$$

用时间平均值计算

$$m_x=E[x]=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}A\,dt=\frac{1}{2}A. \tag{2}$$

$$\psi_x^2=E[x^2]=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}A^2dt=\frac{1}{2}A^2. \tag{3}$$

$$\sigma_x^2=\psi_x^2-m_x^2=\frac{1}{4}A^2, \tag{4}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\overline{\sigma_x^2}}=\frac{1}{2}A. \tag{5}$$

例题 2-13 考虑一维随机走动，单步长的概率密度函数为

$$p(L)=0.10\,\delta(L+2\,\Delta x)+0.25\,\delta(L+\Delta x)+0.40\,\delta(L)$$
$$+0.20\,\delta(L-\Delta x)+0.05\,\delta(L-2\,\Delta x).$$

求 12 步以后位于 $8\,\Delta x$ 处的概率的近似值。

解：对于一般形式的一维随机走动，瑞利首创了一种处理方法：设 X_i 为 i 个随机变量的代数和，即

$$X_i=\sum_{j=1}^{i}L_j.$$

其中 $L_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ i)$具有同一个任意预定的概率密度函数(如本题所给的)。则当 i 较大时，$p(x_i)$十分接近于高斯分布，即可表示为

$$p(x_i)\doteq\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{x_i}}\exp\left[-\frac{(x_i-m_{x_i})^2}{2\,\sigma_{x_i}^2}\right],$$

式中

$$m_{x_i}=im_L,\quad \sigma_{x_i}^2=i\sigma_L^2,$$

记号 m_{x_i}, m_L 分别表示 x_i 和 L 的均值，$\sigma_{x_i}^2$ 和 σ_L^2 分别表示 x_i 和 L 的方差

对于本题，$i=12$，

$$\begin{aligned}m_L&=\int_{-\infty}^{\infty}Lp(L)\,dL\\&=0.10(-2\,\Delta x)+0.25(-\Delta x)+0.40(0)+\\&\quad+0.20(\Delta x)+0.05(2\,\Delta x)\\&=-0.15\,\Delta x,\end{aligned}$$

L的均方值

$$\begin{aligned}E[L^2]&=\int_{-\infty}^{\infty}L^2p(L)\,dL\\&=0.10(-2\,\Delta x)^2+0.25(-\Delta x)^2+0.40(0)^2+\end{aligned}$$

$$+0.20(\Delta x)^2+0.05(2\Delta x)^2$$
$$=1.05\,\Delta x^2,$$

方差

$$\sigma_L^2=E[L^2]-m_L^2$$
$$=1.05\,\Delta x^2-(-0.15\,\Delta x)^2$$
$$=1.0275\,\Delta x^2.$$

故

$$m_{x_{12}}=12\times(-0.15\,\Delta x)=-1.8\,\Delta x,$$
$$\sigma_{x_{12}}^2=12\times 1.0275\,\Delta x^2=12.33\,\Delta x^2,$$
$$\sigma_{x_{12}}=3.5114\,\Delta x,$$

$$p(x_{12})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3.5114\,\Delta x}\exp\left[-\frac{(x_{12}+1.8\,\Delta x)^2}{24.66\,\Delta x^2}\right].$$

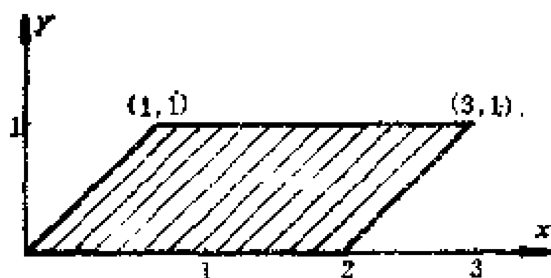
位于 $8\,\Delta x$ 处的概率为

$$P\left[\left(8\,\Delta x-\frac{\Delta x}{2}\right)<x_{12}\leqslant\left(8\,\Delta x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$
$$\doteq\Phi\left(\frac{8.5\,\Delta x+1.8\,\Delta x}{3.5114\,\Delta x}\right)-\Phi\left(\frac{7.5\,\Delta x+1.8\,\Delta x}{3.5114\,\Delta x}\right)$$
$$=\Phi(2.93)-\Phi(2.65)=0.9983-0.9960=0.0023.$$

上式中

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

为拉普拉斯函数，可查表得到。



例题图 2-14-1

例题 2-14 两个随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数在例题图 2-14-1 所示区域内等于常数 c，在该区域外等于零。

(a) 求 c 值，使 $p(x, y)$ 被规格化。

(b) 画出边缘概率密度函数 $p(x)$ 和 $p(y)$。

(c) 画出条件概率密度函数 $p(x|y=0.5)$ 和 $p(y|x=1.5)$。

(d) 随机变量 X 和 Y 是否统计无关.

(e) 求出平均值 m_x 和 m_y、方差 σ_x^2 和 σ_y^2 以及协方差 C_{xy}。

(f) 如果 X 和 Y 的样本值分别为 x_1, x_2, x_3, $\cdots$ 和 y_1, y_2, y_3, $\cdots$。若有两个新随机变量 R 和 S 定义为

$$r_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n;$$

$$s_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n.$$

求出当 $n=20$ 时, 联合概率密度函数 $p(r_n, s_n)$ 的适当表达式。

解: (a) 根据 $\iint_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dxdy = 1$,

得

$$\int_0^1 dy \int_y^{y+2} c dx = 1,$$

即

$$2c = 1, \quad c = \frac{1}{2}.$$

(b) $$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}x & (\text{当 } 0 < x < 1), \\ \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} & (\text{当 } 1 \leqslant x < 2), \\ \int_{x-2}^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(3-x) & (\text{当 } 2 \leqslant x < 3), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

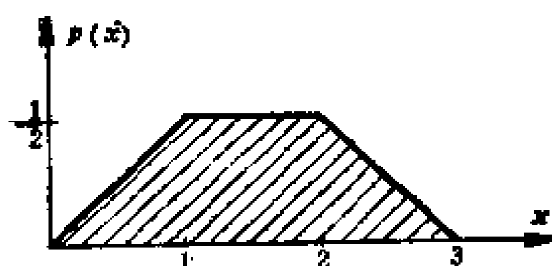
$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_y^{y+2} \frac{1}{2} dx = 1 & (\text{当 } 0 < y < 1), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

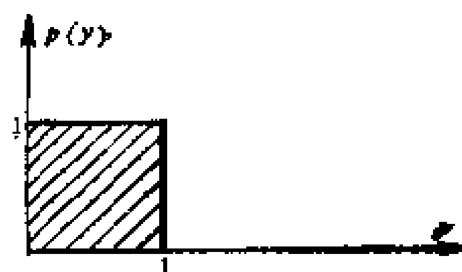
$p(x)$ 和 $p(y)$ 分别表示在例题图 2-11-2 和 3 上。

(c) $$p(x|y=0.5) = \frac{p(x, y)}{p(y=0.5)}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2} & (0.5<x<2.5), \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}$$



例题图 2-14-2



例题图 2-14-3

$$p(y|x=1.5)=\frac{p(x,\ y)}{p(x=1.5)}$$

$$=\begin{cases} 1 & (0<y<1), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

$p(x|y=0.5)$和 $p(y|x=1.5)$表示在例题图 2-14-4 和 5 上。

(d) 因为

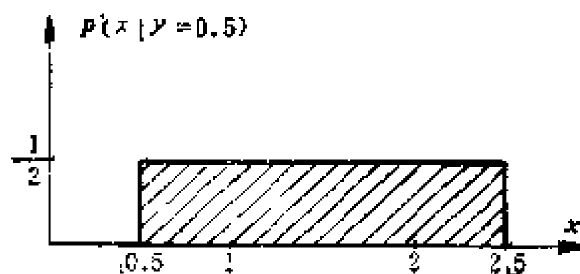
$$p(x|y=0.5)\neq p(x),$$

所以 X 与 Y 不是统计不相关的。

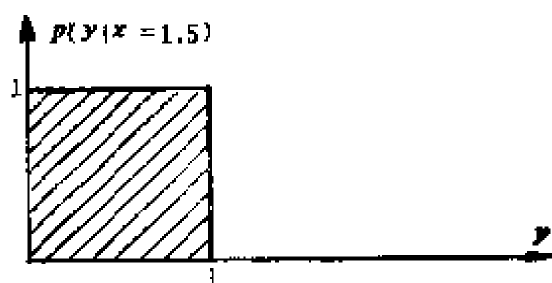
(e) $E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

$$=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}xdx+\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2}dx+$$

$$+\int_2^3 x\cdot\frac{1}{2}(3-x)dx=\frac{3}{2}.$$



例题图 2-14-4



例题图 2-14-5

$$E[y]=\int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy=\int_0^1 y\cdot dy=\frac{1}{2}.$$

$$E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot\frac{x}{2}dx+\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{2}dx+$$

$$+\int_2^3 x^2\frac{1}{2}(3-x)dx=\frac{8}{3}.$$

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty} y^2p(y)dy=\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}.$$

$$\sigma_x^2=E[x^2]-E[x]^2=\frac{8}{3}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{12}.$$

$$\sigma_y^2=E[y^2]-E[y]^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}.$$

$$E[xy]=\iint_{-\infty}^{\infty} xyp(x,\ y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 ydy\int_y^{y+2} xdx$$

$$=\frac{5}{6}.$$

$$C_{xy}=E[xy]-m_xm_y$$

$$=\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}.$$

(f) 由题意所给条件

$$r_n=\sum_{j=1}^{n} x_j;\quad s_n=\sum_{j=1}^{n} y_j.$$

上式中，各 x_j 和 $y_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 分别具有相同的概率分布 $p(x)$ 和 $p(y)$。r_n 和 s_n 相当于二维随机走动中某一个个体走动 n 步后的坐标位置，而其每一步走动必须符合联合概率密度函数 $p(x,\ y)$ 由于现在给的 n 值较大($n=20$)，可以认为，$p(r_n,\ s_n)$非常接近下式所给的二维正态分布：

$$p(r_n,s_n)=\frac{1}{2\pi\sigma_{r_n}\sigma_{s_n}\sqrt{1-\rho^2_{r_ns_n}}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2_{r_ns_n})}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{(r_n-m_{r_n})^2}{\sigma_{r_n}^2}-\frac{2\rho_{r_ns_n}(r_n-m_{r_n})(s_n-m_{s_n})}{\sigma_{r_n}\sigma_{s_n}}+\frac{(s_n-m_{s_n})^2}{\sigma_{s_n}^2}\right]\right\},$$

式中，$m_{r_n}=nm_x=20\times\frac{3}{2}=30$,

$$m_{s_n}=nm_y=20\times\frac{1}{2}=10,$$

$$\sigma_{r_n}^2=n\sigma_x^2=20\times\frac{5}{12}=\frac{25}{3},$$

$$\sigma_{s_n}^2=n\sigma_y^2=20\times\frac{1}{12}=\frac{5}{3},$$

$$\rho_{r_ns_n}=\rho_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{1}{12}\Big/\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

将算出的各值代入 $p(r_n, s_n)$的表达式，得

$$p(r_n,s_n)=\frac{3}{20\pi}\exp\left\{-\frac{5}{8}\left[\frac{3(r_n-30)^2}{25}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{6(r_n-30)(s_n-10)}{25}+\frac{3(s_n-10)^2}{5}\right]\right\}$$

$$=\frac{3}{20\pi}\exp\left\{-\frac{3}{40}[(r_n-30)^2-2(r_n-30)(s_n-10)+\right.$$

$$\left.+5(s_n-10)^2]\right\}.$$

例题 2-15 再考虑上题所定义的随机变量X和Y。通过如下变换定义两个新的随机变量U和V：

$$u=(y-A)\sin\theta+(x-B)\cos\theta;$$
$$v=(y-A)\cos\theta-(x-B)\sin\theta.$$

求出使U和V的平均值等于零的A，B值，并求出使U和V统计不相关的角度θ，再求出在此特定角度下U和V的方差。

解： $m_u=E[(y-A)\sin\theta+(x-B)\cos\theta]$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}[(y-A)\sin\theta+(x-B)\cos\theta]p(x,y)dxdy$$

$$=\sin\theta\int_{-\infty}^{\infty}(y-A)p(y)dy+\cos\theta\int_{-\infty}^{\infty}(x-B)p(x)dx$$

$$=(m_y-A)\sin\theta+(m_x-B)\cos\theta. \tag{1}$$

同理得

$$m_v=(m_y-A)\cos\theta-(m_x-B)\sin\theta. \tag{2}$$

欲使 $m_u=m_v=0$，即使(1)、(2)式右边为零，可得

$$A=m_y,\quad B=m_x. \tag{3}$$

再令 $y_1=y-A$，$x_1=x-B$，则

$$\begin{cases} u=y_1\sin\theta+x_1\cos\theta; \\ v=y_1\cos\theta-x_1\sin\theta. \end{cases} \tag{4}$$

在(4)式中，使 u 和 v 统计不相关的 θ 值应为

$$\theta=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2C_{x_1y_1}}{\sigma_{x_1}^2-\sigma_{y_1}^2} \tag{5}$$

因为

$$m_{x_1}=E[x-B]=m_x-B=0,$$

$$m_{y_1}=E[y-A]=m_y-A=0,$$

故(5) 式中

$$\sigma_{x_1}^2=E[(x-B)^2]=E[(x-m_x)^2]=\sigma_x^2=\frac{5}{12},$$

$$\sigma_{y_1}^2=E[(y-A)^2]=E[(y-m_y)^2]=\sigma_y^2=\frac{1}{12},$$

$$C_{x_1y_1}=E[(x-B)(y-A)]=E[(x-m_x)(y-m_y)]$$

$$=C_{xy}=\frac{1}{12},$$

将上述各值代入到(5) 式得

$$\theta=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\times\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}-\frac{1}{12}}=13^\circ 7'.$$

又由联合概率的莫尔圆得

$$\sigma_u^2=\frac{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{y_1}^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_1}^2-\sigma_{y_1}^2}{2}\right)^2+C_{x_1y_1}^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{12},$$

$$\sigma_v^2=\frac{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{y_1}^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_1}^2-\sigma_{y_1}^2}{2}\right)^2+C_{x_1y_1}^2}=\frac{3-\sqrt{5}}{12}.$$

例题 2-16 求证(2-18)至(2-26)式中有关随机变量标准离差的代数运算法则。

证明：(a) 对于(2-18)式，要证明

$$\sigma_A=\sqrt{\sigma_B^2+\sigma_C^2}. \tag{1}$$

对上式两边平方，得

$$\sigma_A^2=\sigma_B^2+\sigma_C^2. \tag{2}$$

(2)式左边：$\sigma_A^2=E[A^2]-m_A^2=E[(B-C)^2]-(m_B-m_C)^2$

$$=E[B^2]-2E[B\cdot C]+E[C^2]-m_B^2+2m_Bm_C-m_C^2, \tag{3}$$

因为 B 与 C 独立不相关，故 $E[B\cdot C]=m_B\cdot m_C$，

$$\sigma_A^2=E[B^2]-m_B^2+E[C^2]-m_C^2=\sigma_B^2+\sigma_C^2. \tag{4}$$

(b) 对于(2-19)式，要证明

$$\sigma_A=\sqrt{m_B^2\sigma_C^2+m_C^2\sigma_B^2+\sigma_B^2\sigma_C^2}. \tag{5}$$

对上式两边平方，得

$$\sigma_A^2=m_B^2\sigma_C^2+m_C^2\sigma_B^2+\sigma_B^2\sigma_C^2. \tag{6}$$

(6) 式左边：$\sigma_A^2=E[A^2]-m_A^2=E[B^2C^2]-(m_B\cdot m_C)^2$， (7)

(7) 式中的 $E[B^2C^2]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B^2C^2p(B,C)dBdC$，其中 $p(B,C)$为随机变量 B、C 的联合概率密度函数。又因为 B 与 C 独立不相关，则有

$$p(B,C)=p_B(B)p_C(C), \tag{8}$$

(8) 式中的 $p_B(B)$、$p_C(C)$分别为 B、C 的边缘概率密度函数。

$$\therefore \qquad E[B^2C^2]=\iint_{-\infty}^{\infty}B^2C^2p_B(B)p_C(C)dBdC$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}B^2 p_B(B)dB\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}C^2 p_C(C)dC\right]$$

$$=E[B^2]E[C^2],$$

于是 $$\sigma_A^2=E[B^2]E[C^2]-m_B^2m_C^2.$$

(6) 式右边：$m_B^2\sigma_C^2+m_C^2\sigma_B^2+\sigma_B^2\sigma_C^2=m_B^2\{E[C^2]-m_C^2\}+$

$$+m_C^2\{E[B^2]-m_B^2\}+\{E[C^2]-m_C^2\}\{E[B^2]-m_B^2\}$$

$$=m_B^2E[C^2]-2m_B^2m_C^2+m_C^2E[B^2]+E[C^2]E[B^2]-$$

$$-E[B^2]m_C^2-E[C^2]m_B^2+m_C^2m_B^2$$

$$=E[B^2]E[C^2]-m_B^2m_C^2.$$

所以(6) 式两边相等，证毕。

(c) 对于(2-21)式，要证明

$$\sigma_A\doteq\frac{1}{m_C^2}\sqrt{m_C^2\sigma_B^2+m_B^2\sigma_C^2},$$

先来证明：

$$m_A\doteq\frac{m_B}{m_C}.$$

因为 $$m_A=E[A]=E\left[\frac{B}{C}\right]=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{B}{C}p(B,C)dBdC$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{B}{C}p_B(B)\cdot p_C(C)dBdC\qquad(\because\ B\text{与}C\text{独立无关})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}Bp_B(B)dB\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{C}p_C(C)dC$$

$$=E[B]\cdot E\left[\frac{1}{C}\right],\tag{9}$$

当随机变量C服从正态分布时，(9) 式中的$E\left[\frac{1}{C}\right]$为

$$E\left[\frac{1}{C}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_C}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{C}e^{-\frac{(C-m_C)^2}{2\sigma_C^2}}dC,\tag{10}$$

令

$$\frac{C-m_C}{\sigma_C}=u,$$

则
$$E\left[\frac{1}{C}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sigma_C u+m_C)}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m_C}\left(1+\frac{\sigma_C}{m_C}u\right)^{-1}e^{-\frac{u^2}{2}}du, \tag{11}$$

假定 $\sigma_C \ll m_C$，则有$\frac{\sigma_C}{m_C}u\ll 1$，可将$\left[1+\frac{\sigma_C}{m_C}u\right]^{-1}$展开成幂级数，即

$$\left[1+\frac{\sigma_C}{m_C}u\right]^{-1}=1-\frac{\sigma_C}{m_C}u+\left(\frac{\sigma_C}{m_C}u\right)^2-\cdots,$$

代入(11)式，积分得

$$E\left[\frac{1}{C}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m_C}\left(\sqrt{2\pi}+\frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\sqrt{2\pi}+\cdots\right)$$

$$\doteq\frac{1}{m_C}\left(1+\frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\right). \tag{12}$$

应用前面的假定，可舍去(12)式中括号内的第二项，代入(9) 式后得

$$m_A\doteq\frac{m_B}{m_C}\left(1+\frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\right)\doteq\frac{m_B}{m_C}. \tag{13}$$

现在再证明(2-21)式。类似于(9) 式，可得

$$E[A^2]=E\left[\frac{B^2}{C^2}\right]$$

$$=E[B^2]E\left[\frac{1}{C^2}\right], \tag{14}$$

类似于(10)、(11)式，上式中$E\left[\frac{1}{C^2}\right]$为

$$E\left[\frac{1}{C^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m_C^2}\left(1+\frac{\sigma_C}{m_C}u\right)^{-2}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m_C^2}\left(1-2\frac{\sigma_C}{m_C}u+3\frac{\sigma_C^2}{m_C^2}u^2-\cdots\right)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m_C^2}\left(\sqrt{2\pi}+3\frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\sqrt{2\pi}+\cdots\right)$$

$$\doteq\frac{1}{m_C^2}\left(1+\frac{3\sigma_C^2}{m_C^2}\right),$$

所以

$$\sigma_A^2=E[A^2]-m_A^2\doteq\frac{E[B^2]}{m_C^2}\left(1+\frac{3\sigma_C^2}{m_C^2}\right)-\left[\frac{m_B}{m_C}\left(1+\frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\right)\right]^2$$

$$=\frac{(\sigma_B^2+m_B^2)}{m_C^4}(m_C^2+3\sigma_C^2)-\frac{m_B^2}{m_C^2}\left(1+\frac{2\sigma_C^2}{m_C^2}+\frac{\sigma_C^4}{m_C^4}\right)$$

$$=\frac{1}{m_C^4}\Big[\sigma_B^2m_C^2+m_B^2m_C^2+3\sigma_B^2\sigma_C^2+3m_B^2\sigma_C^2-m_B^2m_C^2$$

$$-2m_B^2\sigma_C^2-\frac{m_B^2\sigma_C^4}{m_C^2}\Big]$$

$$\doteq\frac{m_C^2\sigma_B^2+m_B^2\sigma_C^2}{m_C^4}.$$

$$\therefore\quad\sigma_A\doteq\frac{1}{m_C^2}\sqrt{m_C^2\sigma_B^2+m_B^2\sigma_C^2}.$$ 证毕。

在 C 为常数的特殊情况下，$m_C=C$，$\sigma_C=0$，代入上式，得

$$\sigma_A=\frac{\sigma_B}{C}.$$

正如所预期的。

（d）对于(2-23)式，要证明

$$\sigma_A\doteq 2m_B\sigma_B.$$

因为
$$\sigma_A^2=E[A^2]-m_A^2=E[B^4]-(m_B^2+\sigma_B^2)^2$$
$$=E[B^4]-m_B^4-2m_B^2\sigma_B^2-\sigma_B^4, \tag{15}$$

和
$$E[B^4]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_B}\int_{-\infty}^{\infty}B^4e^{-(B-m_B)^2/2\sigma_B^2}dB,$$

令 $\frac{B-m_B}{\sigma_B}=u$，代入上式，得

$$E[B^4]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u\sigma_B+m_B)^4 e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u^4\sigma_B^4+m_B^4+6u^2\sigma_B^2m_B^2+$$

$$4u^3\sigma_B^3m_B+2u\sigma_Bm_B^3)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\sigma_B^4\cdot 3\sqrt{2\pi}+m_B^4\sqrt{2\pi}+6\sigma_B^2m_B^2\sqrt{2\pi}\}$$

$$=3\sigma_B^4+m_B^4+6\sigma_B^2m_B^2,$$

$$\therefore\quad \sigma_A^2=3\sigma_B^4+m_B^4+6\sigma_B^2m_B^2-m_B^4-2m_B^2\sigma_B^2-\sigma_B^4$$

$$=2\sigma_B^4+4\sigma_B^2m_B^2$$

$$\doteq 4\sigma_B^2m_B^2,\qquad (\because\ \sigma_B\ll m_B)$$

即

$$\sigma_A\doteq 2\sigma_Bm_B.$$

(e) 对于(2-26)式，要证明

$$\sigma_A\doteq 3m_B^2\sigma_B,$$

需先证(2-24)式，即

$$m_A=m_B^3+3m_B\sigma_B^2.$$

因 $m_A=E[A]=E[B^3]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B}\int_{-\infty}^{\infty}B^3e^{-(B-m_B)^2/2\sigma_B^2}dB,$

采用与前面相同的变量置换法，得

$$E[B^3]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u\sigma_B+m_B)^3e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u^3\sigma_B^3+3u^2\sigma_B^2m_B+3u\sigma_Bm_B^2+m_B^3)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{3\sigma_B^2m_B\sqrt{2\pi}+m_B^3\sqrt{2\pi}\}$$

$$=m_B^3+3m_B\sigma_B^2,$$

于是
$$\sigma_A^2 = E[A^2] - m_A^2$$
$$= E[A^2] - (m_B^3 + 3m_B\sigma_B^2)^2$$
$$= E[B^6] - m_B^6 - 6m_B^4\sigma_B^2 - 9m_B^2\sigma_B^4,$$
$E[B^6]$的计算法与前面类似：
$$E[B^6] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u\sigma_B + m_B)^6 e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$
积分式中的$(u\sigma_B + m_B)^6$，只需求出u的偶次项（因奇次项和$e^{-\frac{u^2}{2}}$组成奇函数，积分为零）。
$$\therefore \quad E[B^6] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u^6\sigma_B^6 + 15u^4\sigma_B^4m_B^2 + 15u^2\sigma_B^2m_B^4 + $$
$$+ m_B^6)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$= 15\sigma_B^6 + 45\sigma_B^4m_B^2 + 15\sigma_B^2m_B^4 + m_B^6,$$
$$\therefore \quad \sigma_A^2 = 15\sigma_B^6 + 36\sigma_B^4m_B^2 + 9\sigma_B^2m_B^4.$$
当$\sigma_B \ll m_B$时，上式右边前两项可以略去，即得
$$\sigma_A \doteq 3\sigma_B m_B^2.$$

例题 2-17 假设飞行器返回地面时，受重力作用自由下落、在飞行器舱内，质量为m的物体安放在底板上，若底板的振动加速度A_1是正态分布的随机变量，其$E[a_1] = 1.65g$，$\sigma_{a_1} = 0.15g$，求该物体的有效加速度值A不大于$3g$的概率(式中g为重力加速度)。

解：该物体的绝对加速度，是底板所对应位置的重力加速度与飞行器底板相对于地球的加速度之和：
$$a = g + a_1.$$
上式右边一个是常量，一个是随机变量，彼此当然是独立无关的。
$$\therefore \quad E[a] = g + E[a_1]$$
$$= g + 1.65g = 2.65g,$$

$$\sigma_a=\sqrt{\sigma_g^2+\sigma_{a_1}^2}=\sqrt{(0.15\,g)^2}=0.15\,g\,.$$

上式中，应用了常量的标准离差为零的性质。

正态随机变量经线性运算后，得到的随机变量仍是正态的，即 a 服从正态分布，

$$\therefore\quad a=2.65\,g\pm3\times0.15\,g\times$$
$$\times[\text{Prob}(2.2\,g<a\leqslant3.1\,g)=0.9974].$$

其分布函数为

$$P_a(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-(u-m_a)^2/2\,\sigma_a^2\}du,$$

故

$$\text{Prob}(a\leqslant3\,g)=P_a(3\,g)=\Phi\left(\frac{3\,g-m_a}{\sigma_a}\right)=\Phi(2.333),$$

式中

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\text{Prob}(Z\leqslant z).$$

函数 $\Phi(Z)$的值可查表，得

$$\Phi(2.333)=0.9901,$$

$$\therefore\quad \text{Prob}(a\leqslant3\,g)=0.9901.$$

讨论：求得的有效加速度可用来预测飞行器中的精密仪器是否会在返回地面时损坏或预测其中的驾驶员能否承受这种环境。

例题 2-18 图 2-18-1 所示液压调节阀，柱塞受随机液体压力作用。设左侧压力的合力为 X_1，右侧压力的合力为 X_2，已知这两个合力均为随机过程，随机变量 X_1、X_2 均服从正态分布，且彼此独立无关，若已知 $m_{x_1}=200$ 公斤，$\sigma_{x_1}=45$ 公斤；$m_{x_2}=170$ 公斤，$\sigma_{x_2}=15$ 公斤。求柱塞所受总压力的大小和指向的概率特征。

解：取 x 轴水平向右，则柱塞所受的总压力 $X=X_1-X_2$，即有

$$m_x = m_{x_1} - m_{x_2} = 200 - 170 = 30 \text{ 公斤},$$

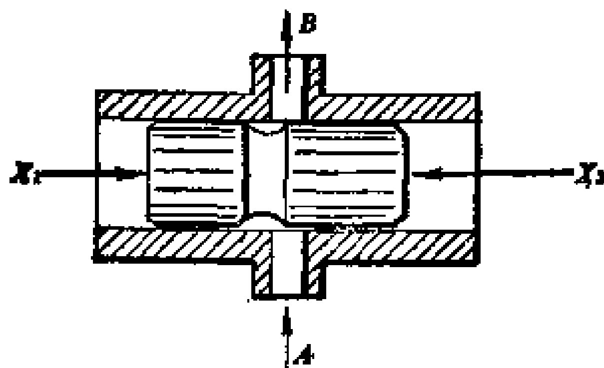
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} = \sqrt{45^2 + 15^2} = 47.43 \text{ 公斤}.$$

当 $X>0$ 时，总压力的方向指向右，其概率为：

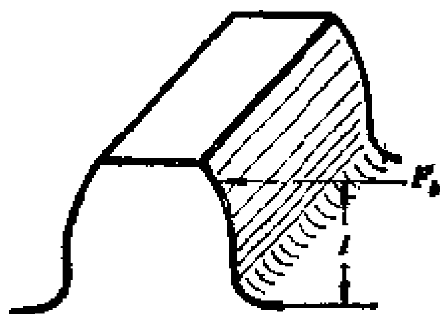
$$\begin{aligned}\text{Prob}(0<X<\infty) &= \int_0^\infty p(x)dx \\ &= 1-\Phi\left(\frac{0-m_x}{\sigma_x}\right) \\ &= 1-\Phi(-0.6327) \\ &= 1-0.2643 = 0.7357.\end{aligned}$$

总压力指向右的概率为0.7357，所以指向左的概率为0.2643。

讨论：柱塞在此大小和方向不断变化的液体总压力作用下，将作随机振动。由于柱塞的运动，使输入管道A的液体经柱塞的空隙在管道B输出的流量发生变化，这就起到了一种调节作用。



例题图 2-18-1



例题图 2-19-1

例题 2-19 作用在齿轮上的圆周力为 F_b，它对齿根的力臂为 l，F_b 及 l 均为随机变量，且彼此独立不相关。已知 $E[F_b]=3800$ 公斤，$\sigma_{F_b}=460$ 公斤；$E[l]=7.3$ 厘米，$\sigma_l=0.16$ 厘米，求力 F_b 对齿根的矩 M。

解：因为力矩为

$$M = F_b \cdot l, \tag{1}$$

$$\therefore \quad E[M] = E[F_b]E[l] = 27740 \text{ (公斤·厘米)}, \tag{2}$$

$$\sigma_M = \sqrt{(E[F_b])^2\sigma_l^2+(E[l])^2\sigma_{F_b}^2+\sigma_{F_b}^2\sigma_l^2}$$

$$=[3800^2\times0.16^2+7.3^2\times460^2+460^2\times0.16^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\doteq 3413\ (\text{公斤·厘米})。\qquad (2)$$

$\therefore$ $\qquad M=27740\pm3\times3413$ 公斤·厘米。

讨论：(1) 若取 $M=27740\pm3\times3413\leqslant[M_{许可值}]$，则此设计为可靠度等于99.75%的概率设计。

(2) 本题中 σ_{F_b} 和 σ_l 值不很小，故求 σ_M 时，根号中的最后一项不能略去。

(3) 由于齿轮表面不可避免地具有凹凸不平的疵点，各齿轮的轮廓面形状以及齿厚、间隙等都不可能很理想，这就使作用在齿轮上的圆周力 F_b 和力臂 l 是随机的，因而引起装有齿轮之轴的随机振动。

例题 2-20 已知一构件的弹性模量$(m_E, \sigma_E)=(2.0\times10^6, 3.5\times10^5)$公斤/厘米²，构件内的应力为$(m_\sigma, \sigma_\sigma)=(15000, 1600)$公斤/厘米²，从材料力学单向拉伸可知$\varepsilon=\sigma/E$，试对应变 ε 进行估算。

解 $$m_\varepsilon=\frac{m_\sigma}{m_E}=\frac{15000}{2.0\times10^6}=7.5\times10^{-3},$$

$$\sigma_\varepsilon=\sqrt{\frac{m_\sigma^2\cdot\sigma_E^2+m_E^2\cdot\sigma_\sigma^2}{m_E^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1.5\times10^4)^2(3.3\times10^5)^2+(2.0\times10^6)^2(1.6\times10^3)^2}{(2.0\times10^6)^4}}$$

$$=7.04\times10^{-4}.$$

例题 2-21 质量 m 被弹簧悬挂在框架顶部，框架固结在作铅垂振动的振动体上。已知振动体的振动规律为 $x'=h\sin pt$，式中 p 为确定的频率，h 为正态分布的随机变量．已知 $m_h=6$ 厘米，$\sigma_h=0.3$厘米，且$\lambda=p/\omega=\dfrac{1}{2}$，$\omega$ 为系统的固有频率。求质量 m

与框架的间隙为 8.5 厘米时，两者不相碰的概率。又欲使不相碰概率为 99.5%，间间隙应留多大？

解：取质量 m 的静平衡位置为坐标原点，其绝对位移为 x，与框架间相对位移为 $x-x'$，运动微分方程为

$$m\ddot{x}+k(x-x')=0. \tag{1}$$

将 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ 和 $x'=h\sin pt$ 代入(1)式，得

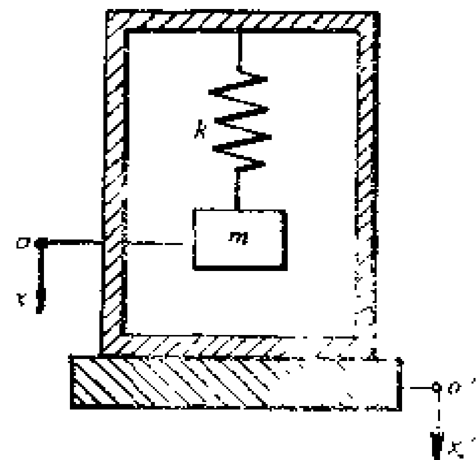
$$\ddot{x}+\omega^2 x=h\omega^2\sin pt. \tag{2}$$

根据受迫振动理论解得

$$x=B\sin pt, \tag{3}$$

式中

$$B=\frac{1}{1-\lambda^2}h=\frac{4}{3}h. \tag{4}$$



例题图 2-21-1

按题意 h 为随机变量，故(4)式表示 B 是随机变量 h 的函数，亦为随机变量，所以应用公式可得

$$m_B=\frac{4}{3}m_h=8 \text{ 厘米},$$

$$\sigma_B=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2\sigma_h^2}=\frac{4}{3}\sigma_h=0.4 \text{ 厘米}.$$

这里用到了常数的平均值就是其本身以及常数的标准离差为零的性质。可见，随机变量乘以常数后的均值和标准离差等于其原来均值和标准离差的常数倍。

又 B 也为正态分布的随机变量。

$$\therefore \quad \text{Prob}(B\leqslant 8.5)=\Phi\left(\frac{8.5-m_B}{\sigma_B}\right)$$

$$=\Phi(1.25)=0.8944.$$

上述结果表示间隙为 8.5 厘米时，不相碰概率是 89.44%，欲使不相碰概率为 99.5%，即

$$\text{Prob}(B\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-m_B}{\sigma_B}\right)\geqslant 0.995,$$

查拉普拉斯函数表，得

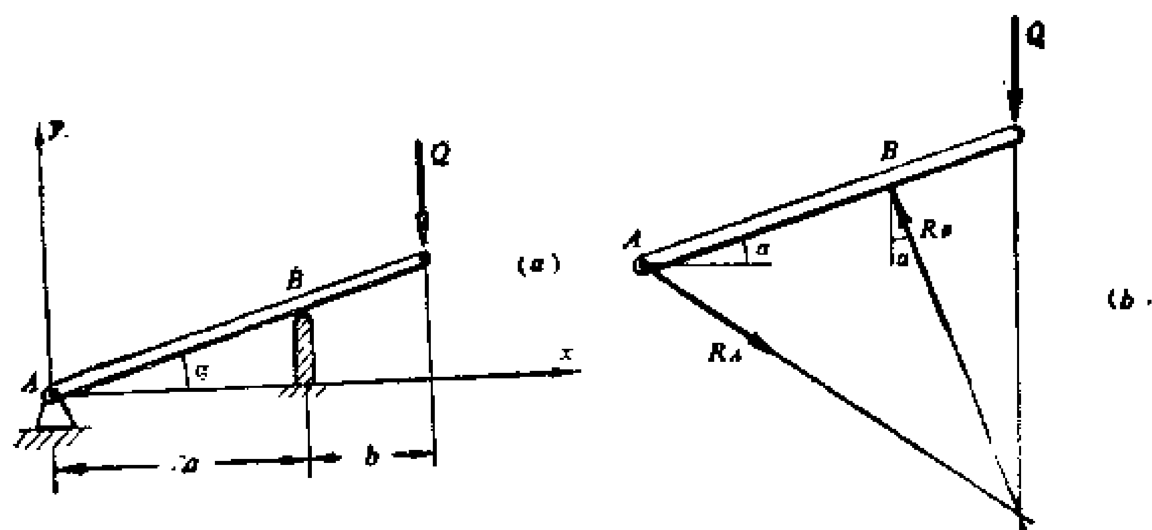
$$\frac{b-m_B}{\sigma_B}=2.575,$$

$$\therefore \quad b=2.575\,\sigma_B+m_B=2.577\times 0.4+8$$

$$=9.03 \text{ 厘米}.$$

即间隙应为 9.03 厘米。

例题 2-22 已知跳板 AB 上自由端受到的铅垂力Q是随机变量，其概率特征为 m_Q 及 D_Q，试求 A、B 处反力及跳板 AB 上的最大正应力的平均值和方差。



例题图 2-22-1

解：跳板 AB 仅受三个力，由三力平衡汇交原理可知 R_A 和 R_B 的大小分别为

$$R_A=Q\sqrt{\sin^2\alpha+\left(\frac{b}{a}\cos\alpha\right)^2}; \qquad (1)$$

$$R_B=Q\left(1+\frac{b}{a}\right)\cos\alpha. \qquad (2)$$

由(1)、(2)式可知，R_A 和 R_B 都是随机变量Q的函数。所以

$$m_{R_A}=\sqrt{\sin^2\alpha+\left(\frac{b}{a}\cos\alpha\right)^2}\cdot m_Q;$$

$$m_{R_B}=\left(1+\frac{b}{a}\right)\cos\alpha\, m_Q.$$

$$D_{R_A}=\left[\sin^2\alpha+\left(\frac{b}{a}\cos\alpha\right)^2\right]D_Q;$$

$$D_{R_B}=\left(1+\frac{b}{a}\right)^2\cos^2\alpha\, D_Q.$$

各截面的弯矩变化规律为

$$\begin{cases} m(x)=-Q[(a+b)-x] \quad (a\leqslant x\leqslant(a+b)), \\ m(x)=Q\left(1+\frac{b}{a}\right)(a-x)-Q[(a+b)-x] \quad (0\leqslant x<a). \end{cases} \tag{3}$$

从(3)式可见，弯矩为最大的截面在B处，

$$m_{max}=Q\cdot b. \tag{4}$$

则最大压应力应由压缩与弯曲两种变形组合而成，即

$$\sigma_{max}=\frac{m_{max}}{W_x}+\frac{Q\sin\alpha}{A}, \tag{5}$$

式中 W_x 为跳板B处的抗弯截面模量，A为跳板在B处的截面积。由(5)式可见 σ_{max} 是随机变量Q的函数，所以

$$m_{\sigma_{max}}=\left(\frac{b}{W_x}+\frac{\sin\alpha}{A}\right)m_Q,$$

$$D_{\sigma_{max}}=\left(\frac{b}{W_x}+\frac{\sin\alpha}{A}\right)^2 D_Q.$$

讨论：当α角很小时，$\sin\alpha\doteq0$，$\cos\alpha\doteq1$，由(1)、(2)、(5)式可知

$$R_A\doteq\frac{b}{a}Q;$$

$$R_B\doteq\left(1+\frac{b}{a}\right)Q.$$

$$\sigma_{max} \doteq \frac{b}{W_x} Q,$$

$$\therefore \quad m_{R_A} \doteq \frac{b}{a} m_Q, \quad m_{R_B} \doteq \left(1+\frac{b}{a}\right) m_Q,$$

$$D_{R_A} \doteq \left(\frac{b}{a}\right)^2 D_Q; \quad D_{R_B} \doteq \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 D_Q,$$

$$m_{\sigma_{max}} \doteq \frac{b}{W_x} m_Q, \quad D_{\sigma_{max}} \doteq \left(\frac{b}{W_x}\right)^2 D_Q.$$

例 2-23 已知客车座椅按 $x = A\sin 2\pi f t$ 的规律振动，其中 A 及 f 均为随机变量，$(m_A, \sigma_A) = (0.2, 0.01)$ 厘米，$(m_f, \sigma_f) = (2, 0.05)$ 赫，若这些随机变量均服从正态分布，求座椅速度、加速度、加加速度（加速度的变化率）最大值的概率特征。

解： 由振动理论知

(1) $v_{max} = A \cdot 2\pi f$,

$$\therefore \quad m_{v_{max}} = 2\pi m_A \cdot m_f = 2 \times 3.14 \times 0.2 \times 2$$

$$= 2.51 \text{ (厘米/秒)},$$

$$\sigma_{v_{max}} = 2\pi \sqrt{m_A^2 \sigma_f^2 + m_f^2 \sigma_A^2 + \sigma_f^2 \sigma_A^2}$$

$$= 2 \times 3.14 \times \sqrt{0.2^2 \times 0.05^2 + 2^2 \times 0.01^2 + 0.05^2 \times 0.01^2}$$

$$= 0.14 \text{ (厘米/秒)}.$$

因本题中 σ_A、σ_f 均很小，在下面运算中均可按近似式计算。

(2)
$$a_{max} = A\, 4\pi^2 f^2,$$

$$m_{f^2} = m_f^2 = 4 \text{ (1/秒}^2\text{)},$$

$$\sigma_{f^2} \doteq 2 m_f \sigma_f = 0.2 \text{ (1/秒}^2\text{)},$$

$$\therefore \quad m_{a_{max}} = 4\pi^2 m_A m_{f^2} = 31.58 \text{ (厘米/秒}^2\text{)},$$

$$\sigma_{a_{max}} \doteq 4\pi^2 \sqrt{m_A^2 \sigma_{f^2}^2 + m_{f^2}^2 \sigma_A^2 + \sigma_{f^2}^2 \sigma_A^2}$$

$$= 2.23 \text{ (厘米/秒}^2\text{)}.$$

(3)
$$\dot{a}_{max} = A\, 8\pi^3 f^3,$$

$$m_{f^3} = m_f^3 = 8 \text{ (1/秒}^3\text{)},$$

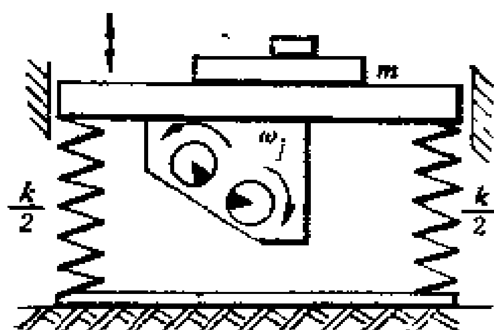
$$\sigma_{f^3} \doteq 3 m_f^2 \sigma_f = 0.6 \text{ (1/秒}^3\text{)},$$

$$m_{\dot{a}_{max}} \doteq 8\pi^3 m_A m_f^3 = 396.88(\text{厘米/秒}^3),$$

$$\sigma_{\dot{a}_{max}} = 8\pi^3\sqrt{m_A^2\sigma_f^{2\cdot3} + m_f^{2\cdot3}\sigma_A^2 + \sigma_f^{2\cdot3}\sigma_A^2}$$

$$= 35.80(\text{厘米/秒}^3).$$

例题 2-24 例题图 2-24-1 所示的振动筛，是一种最简单的共振筛。已知振动台面及振动物的总重量在振动开始时为 1380 公斤，由于振动物质的不规则下落，最后重量为 920 公斤；带有偏心轮的激振电机的转速为 $n=960\pm50$ 转/分。欲使"共振"的可靠度为95%，试确定振动筛中弹簧刚度的概率特征。



例题图 2-24-1

解：

(1) 先确定振动质量和激振频率的概率特征。由题意给出的条件知，振动质量 m 和激振频率 ω_j 都是随机变量，由于它们受许多因素的影响，根据中心极限定理，可以认为它们是服从正态分布的。而正态分布的随机变量主要落在 $(-3\sigma, 3\sigma)$ 区域内，因此

$$\begin{cases} m_m + 3\sigma_m = 1380/9.8; \\ m_m - 3\sigma_m = 920/9.8 \quad . \end{cases} \tag{1}$$

由方程组(1)解得

$$\begin{cases} m_m = 117.35\ \text{公斤·秒}^2/\text{米}, \\ \sigma_m = 7.82\ \text{公斤·秒}^2/\text{米}. \end{cases} \tag{2}$$

又

$$\begin{cases} m_{\omega_j} = 960\times\dfrac{2\pi}{60} = 32\pi\ (1/\text{秒}), \\ 3\sigma_{\omega_j} = 50\times\dfrac{2\pi}{60}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\therefore \qquad \sigma_{\omega_j} = \frac{5}{9}\pi \quad (1/\text{秒}).$$

(2) 由共振条件，建立激振频率 ω_i 和系统固有频率 ω_n 之间的关系。因系统质量 m 是随机变量，故 ω_n 也是随机变量。

系统处于良好的近"共振"状态所必须满足的条件是：

$$m_{\omega_i} = m_{\omega_n}, \tag{4}$$

以及

$$|\delta| = |\omega_i - \omega_n| \leqslant \Delta\omega. \tag{5}$$

(5)式要求 ω_i 与 ω_n 始终非常接近，一般 $\Delta\omega$ 可取 m_{ω_i} 或 m_{ω_n} 的百分之五，即

$$|\delta| = |\omega_i - \omega_n| \leqslant 0.05\, m_{\omega_i} = 0.05\, m_{\omega_n}. \tag{6}$$

由上式和(2-18)式知

$$m_\delta = m_{\omega_i} - m_{\omega_n} = 0, \tag{7}$$

$$\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_{\omega_i}^2 + \sigma_{\omega_n}^2}. \tag{8}$$

假设 ω_n 服从正态分布，则 δ 为两正态过程之差，也是正态的。题目上要求共振的可靠性为95%，即

$$\mathrm{Prob}(-\Delta\omega \leqslant \delta \leqslant \Delta\omega) = \Phi\left(\frac{\Delta\omega}{\sigma_\delta}\right) - \Phi\left(\frac{-\Delta\omega}{\sigma_\delta}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\Delta\omega}{\sigma_\delta}\right) - 1$$

$$= 0.95,$$

$$\therefore \qquad \frac{\Delta\omega}{\sigma_\delta} = 1.96,$$

即

$$\sigma_\delta = \frac{\Delta\omega}{1.96} = \frac{0.05\, m_{\omega_i}}{1.96} = 0.0255\, m_{\omega_i}. \tag{9}$$

(3) 确定弹簧刚度的概率特征。

将振动筛简化为单自由度系统，则

$$k = m\omega_n^2,$$

$$\therefore \quad m_k = m_m m_{\omega_n}^2$$

$$= m_m (m_{\omega_n})^2$$

$$= m_m (m_{\omega_i})^2$$

$$= 117.35 \times (32\pi)^2 = 1185994.83 (\text{公斤/米}).$$

上式中应用了关系式(4)，又因 ω_n 的分布是正态的，可以应用(2-22)式中的近似式。

同理，

$$\sigma_k^2 = m_m^2\sigma_{\omega_n^2}^2 + m_{\omega_n^2}^2\sigma_m^2$$
$$= m_m^2 \times 4\, m_{\omega_n}^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_{\omega_s}^2) + \left(\frac{m_k}{m_m}\right)^2\sigma_m^2$$
$$= 4\, m_m m_k(\sigma_\delta^2 - \sigma_{\omega_s}^2) + \left(\frac{m_k}{m_m}\right)^2\sigma_m^2$$
$$= 7398665894 \ (\text{公斤}^2/\text{米}^2).$$

上式中 $\sigma_{\omega_n^2}^2$ 和 $m_{\omega_n^2}^2$ 的计算分别用到了(2-23)和(2-21)式。

$$\therefore \qquad \sigma_k = 86015.5 (\text{公斤/米}).$$

讨论：(1) 本题涉及的是另一种可靠性设计方法，即允许设计参数是随机变量；弹簧刚度可有一个误差范围。这样，对弹簧加工的要求就降低了。

(2) 前面已认为 ω_n、m 服从正态分布，经平方、相乘等非线性运算后，弹簧刚度 k 一般来说，已不是正态分布的随机变量。

(3) 此问题的逆运算，即如何设计系统的参数，以防止其受到激励而共振，也可用同样方法处理。

第二章习题

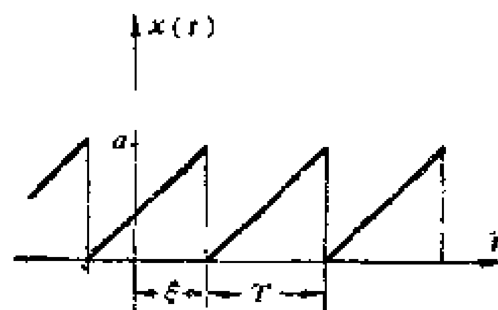
习题 2-1 试分别举出日常生活中随机变量服从均匀分布及正态分布的例子。

习题 2-2 求图示锯齿波的概率分布函数和概率密度函数。

答案：

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & (0 \leqslant x \leqslant a), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ \dfrac{x}{a} & (0 \leqslant x \leqslant a); \\ 1 & (x > a). \end{cases}$$



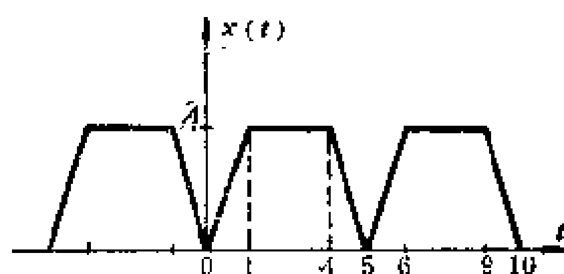
习题图 2-2

习题 2-3 求图示梯形波的概率分布函数和概率密度函数。

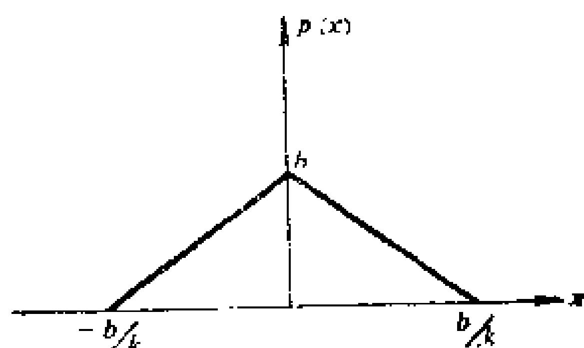
答案：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{5A}+\dfrac{3}{5}\delta(x-A) & (0\leqslant x\leqslant A),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

$$P(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{5A} & (0<x<A),\\ 1 & (A\leqslant x<\infty).\end{cases}$$



习题图 2-3



习题图 2-4

习题 2-4 随机变量 X 的概率密度函数为：

$$p(x)=\begin{cases}-k|x|+b & \left(0\leqslant|x|\leqslant\dfrac{b}{k}\right),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

式中，$b>0$，$k>0$，且 $\frac{b^2}{k}=1$。则函数 $Y=aX^2$ 是一个新的随机变量。试求 Y 的概率密度函数，并画出其图形。

答案：

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{ay}}(-k\sqrt{y/a}+b) & \left(0<y\leqslant\dfrac{ab^2}{k^2}\right),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}\quad (\text{若 } a>0)$$

$$p(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{ay}}(-k\sqrt{y/a}+b) & \left(-\dfrac{ab^2}{k^2}\leqslant y<0\right),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}\quad (\text{若 } a<0)$$

习题 2-5 已知 $p(x)=\begin{cases}cx & (0\leqslant x\leqslant 3),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$

式中 c 为常数。求：(a) $P(x)$的函数表示式并画图，(b) 计算 Prob[$0.2\leqslant X(t)\leqslant 0.6$]。

答案：

$$P(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ \dfrac{x^2}{9} & (0\leqslant x<3),\\ 1 & (3<x<\infty).\end{cases}$$

$$\text{Prob}[0.2\leqslant X(t)\leqslant 0.6]=0.0356.$$

习题 2-6 设 X 的概率分布函数为 $P(x)=A+B\,\text{tg}^{-1}x$，求系数 A、B 及 X 的概率密度函数。

答案： $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$，

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+x^2)}.$$

习题 2-7 已知随机变量X的概率密度函数为

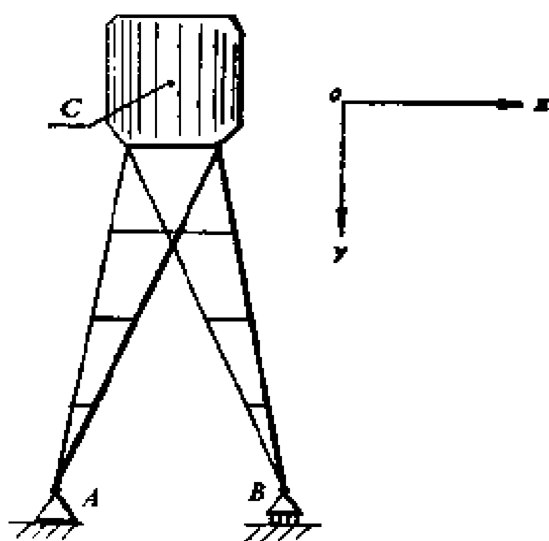
$$p(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ 0 & (x<0,\ x>1).\end{cases}$$

试求 $\eta=3x+1$ 的概率密度函数。

答案：

$$p(\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & (1\leqslant\eta\leqslant 4),\\ 0 & (\eta<1,\ \eta>4).\end{cases}$$

习题 2-8 某偏心轮振动器的相位在 0 到 2π 范围内是随机的，求振动器相位落在第一象限及第二、三、四象限的概率。



习题图 2-10

答案：

$$\text{Prob}(A_i)=\frac{1}{4}\qquad (i=\text{I},\text{II},\text{III},\text{IV}).$$

习题 2-9 两个统计不相关的随机变量X和Y具有相同的概率密度函数：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (-1<x<1),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (-1<y<1),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

求随机变量 $R=y/x^2$ 的概率密度函数。

答案：

$$p(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (0<r<1),\\ \dfrac{1}{6r\sqrt{r}} & (1<r<\infty),\\ \dfrac{1}{6} & (-1<r<0),\\ -\dfrac{1}{2r\sqrt{-r}} & (-\infty<r<-1).\end{cases}$$

习题 2-10 一钢结构水塔受风激励，若将它简化为最简单的单自由度系统，质心 C 有 x 和 y 两个方向的振动变量（X，Y），假定这两个随机变量的联合概率密度函数为正态分布，即

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2\rho_{xy}\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right],$$

求 X 与 Y 两随机变量之比的概率分布函数。

答案：

$$P\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\frac{1}{\pi}\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}{\sigma_y^2\left(\frac{x}{y}-\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2-\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)}.$$

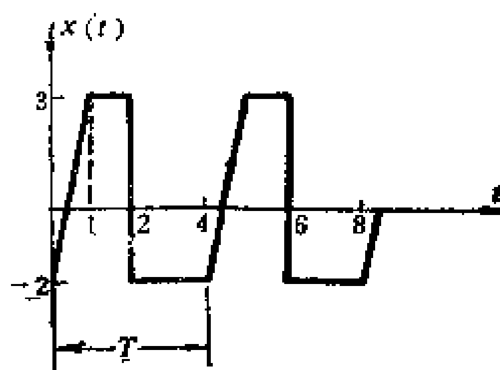
习题 2-11 求图示周期性锯齿形波的均值和均方值。

答案：

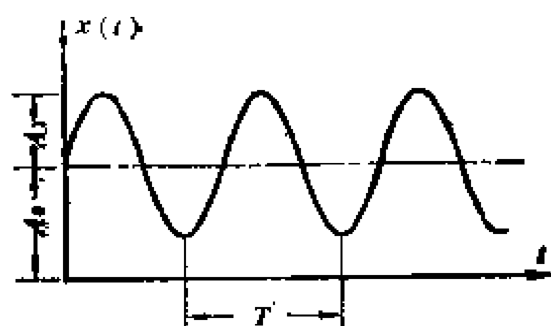
$$E[x]=-\frac{1}{8},$$

$$E[x^2]=\frac{5}{6}.$$

习题 2-12 图示带有不变分量的一种正弦波，方程为 $x=A_0+A_1\sin\omega t$，求其期望值和均方值。



习题图 2-11



习题图 2-12

答案： $E[x]=A_0$，$E[x^2]=A_0^2+\frac{1}{2}A_1^2$。

习题 2-13 两随机变量X和Y，平均值分别为$E[x]$和$E[y]$，若X和Y是统计独立的，则X和Y之积的平均值$E[xy]$等于其各自平均值的积，即$E[xy]=E[x]\cdot E[y]$。若$Z=X+Y$，其中X和Y统计独立，试证明

$$E[z^2]=E[x^2]+E[y^2]+2\,E[x]\cdot E[y].$$

此外，若

$$p(x)=\begin{cases}0.5 & (0\leqslant x\leqslant 2),\\ 0 & (x<0 \text{ 和 } x>2).\end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases}1 & (0\leqslant y\leqslant 1),\\ 0 & (y<0 \text{ 和 } y>1).\end{cases}$$

求$E[z^2]$和σ_z。

答案： $E[z^2]=2\frac{2}{3}$. $\sigma_z=\sqrt{\frac{5}{12}}$.

习题 2-14 两个随机变量X和Y的联合概率密度函数为

$$p(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\pi\sqrt{1-x^2}}e^{-\frac{y^2}{2}} & \begin{pmatrix}y\geqslant 0\\ |x|<1\end{pmatrix}\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

求边缘概率密度函数$p(y)$和条件概率密度函数$p(x|y)$，并求出X的平均值，随机变量X和Y是不是统计不相关的？

答案：

$$p(y)=\begin{cases}ye^{-\frac{y^2}{2}} & y\geqslant 0,\\ 0 & (\text{其它})；\end{cases}\qquad p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & (|x|<1),\\ 0 & (\text{其它})；\end{cases}$$

$$p(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & (|x|<1),E[x]=0;\\ 0 & (其它);\end{cases}$$

X和Y是统计不相关的。

习题 2-15 随机变量X和Y统计无关，可以按如下的边缘概率密度函数取样：

$$p(y)=\begin{cases}2(1-x) & (0<x<1),\\ 0 & (其它).\end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases}2(1-y) & (0<y<1),\\ 0 & (其它).\end{cases}$$

画出联合概率密度函数 $p(x,\ y)$ 的简图，并求出平均值 $E[x]$和$E[y]$，均方值 $E[x^2]$和$E[y^2]$，协方差 C_{xy}，以及 $E[x+y]$。

答案：

$$E[x]=\frac{1}{3},E[y]=\frac{1}{3},\quad E[x^2]=\frac{1}{6},\quad E[y^2]=\frac{1}{6},\quad C_{xy}=0.$$

$$E[x+y]=\frac{2}{3}.$$

习题 2-16 平稳随机过程定义 $X[t]$为：

$$x_r(t)=\sum_{n=1}^{5}A_{nr}\cos(nm_{\omega_0}t+\theta_{nr})\qquad(r=1,2\cdots),$$

式中：$x_r(t)$——总体的第r个元；A_{nr}——随机变量A的样本值；m_{ω_0}——平均圆频率；θ_{nr}——随机相位角θ的样本值，θ在$[0,2\pi]$内均匀分布。

如果随机变量A是正态的，其平均值为m_A，方差为D_A，求$X[t]$的总体平均值和总体方差。$X[t]$是正态过程吗？

答案：

$E[x]=0,D[x]=5(\sigma_A{}^2+m_A{}^2)$，$X[t]$接近于正态过程。

习题 2-17 一随机振动试验，需要用两台电荷放大器和一架磁带记录仪来完成，若有一台电荷放大器发生故障或示波器发生故障，则试验就无法进行。求用各故障出现的概率描述“试验不能进行”这一事件的概率。

答案：

$$P(C)=P(A_1+B)+P(A_2+B)-P(A_1+A_2+B),$$

这里 C 表示试验不能进行的事件，A_1、A_2、B 分别表示电荷放大器 I、II 和磁带记录仪发生故障的事件。

习题 2-18 已知随机变量的函数是包含多个随机变量的线性组合，即

$$W = aX + bY + cZ + \cdots.$$

求均值和方差。

答案：

$$E[W] = am_X + bm_Y + cm_Z + \cdots,$$

$$D[W] = a^2D_X + b^2D_Y + c^2D_Z + \cdots,$$

这里，m_X、m_Y、m_Z、$\cdots$ 及 D_X、D_Y，$D_Z \cdots$ 分别为随机变量 X、Y、$Z \cdots$ 的均值和方差。

习题 2-19 一部件由曲柄 C，两个垫圈 W_1、W_2 及两根侧杆 B_1、B_2 等元件叠装而成。各元件的尺寸都是正态随机变量，已知其平均值分别为

$m_C = 7.5$ 毫米，

$m_{W1} = 0.6$ 毫米，

$m_{W2} = 0.6$ 毫米，

$m_{B1} = 4.5$ 毫米，

$m_{B2} = 4.5$ 毫米。

求该部件尺寸的平均值。假设所有元件的方差 σ^2 都相同，欲使部件尺寸超过公差 ± 0.25 毫米的概率不大于 0.0027，每个元件的公差应为多少？

答案：

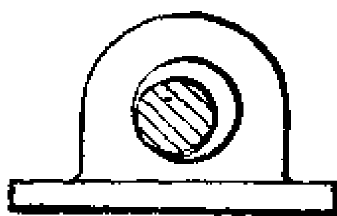
部件的平均值 $m_S = 17.7$ 毫米，

每个元件的公差 $\Delta = \pm 0.11$ 毫米。

习题 2-20 轴径和轴承相配合，已知轴的外径 $(E[S], \sigma_S) = (1.048, 0.0013)$ 厘米，轴承内径 $(E[B], \sigma_B) = (1.059, 0.0017)$，求随机装配时的轴承间隙 z。

答案：

$(m_Z, \sigma_Z) = (0.011,\ 0.0021)$。



习题图 2-20

习题 2-21 已知等截面拉杆，其截面积为 $(E[A], \sigma_A) = (10, 0.4)$ 厘米^2，在此截面上应力为 $(E[S], \sigma_S) = (5\times10^4,\ 3\times10^3)$ 公斤/厘米^2，求此拉杆所受的载荷。

答案：

$(E[P], \sigma_P) = (5\times10^5,\ 3.6\times10^4)$ 公斤。

习题 2-22 设 X 和 Y 是两个统计不相关的随机变量，令 $z=x\cdot y$。试用 x 和 y 的概率密度函数 $p_x(x)$ 和 $p_y(y)$ 来表示 Z 的概率密度函数 $P_z(z)$。

答案：

$$p_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{s}\right| p_x\left(\frac{r}{s'}\right)p_y(s)ds$$

习题 2-23 图示悬臂梁受随机力 Q，已知其平均值 m_Q 和方差 D_Q，求梁上 B 处的最大挠度及 A 处最大应力之均方值，已知梁的弯曲刚度为 EJ_x，抗弯截面模量为 W_x。

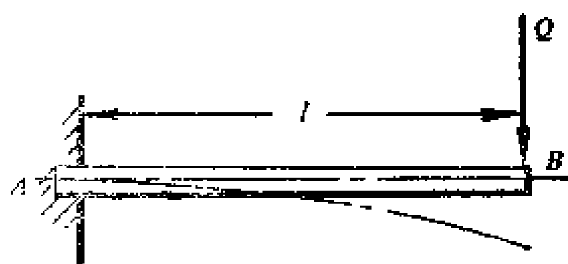
答案：

$$m_f=\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ_x}m_Q,$$

$$D_f=\left(\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ_x}\right)^2 D_Q,$$

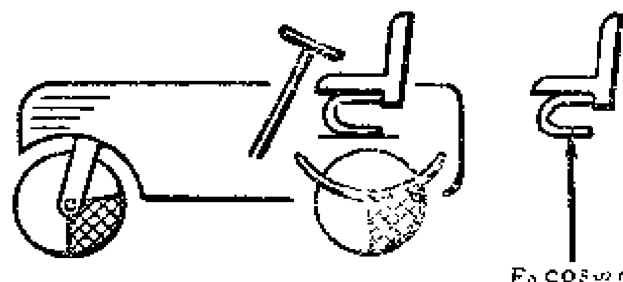
$$m_{\sigma_{max}}=\frac{m_Q\cdot l}{W_x},$$

$$D_{\sigma_{max}}=\frac{l^2}{W_x}D_Q.$$



习题图 2-23

习题 2-24 图示振动压路机，它受路面随机激励，座椅装有减振器。若压路机底板给座椅的激励力为 $F_0\cos\omega t$，其中力幅 F_0 是正态分布的随机变量。又知 F_0 的平均值 $m_{F_0}=10$ 公斤，标准离差 $\sigma_{F_0}=5$ 公斤，求座椅受到激励力在 15 到 20 公斤范围内的概率。



习题图 2-24

答案： $\text{Prob}(15\leqslant F_0\leqslant 20)=0.1359$。

参 考 文 献

[1] R.W.克拉夫、J.彭津，结构动力学，科学出版社，1981。

[2] E.B.Haugen, Probabilistic Mechanical Design, Wiley-Interscience, 1980

[3] 庄表中，共振式机械振动参数的可靠性设计，机械强度，1981，第2期。

第三章　回归方法与相关分析

回归方法是用最小二乘法（优化方法的一种）寻找隐藏在两个随机量之间的统计规律性的方法。许多试验的结果若用回归方法来描绘曲线，从总体上讲误差最小。

相关分析是对两个随机变量之间的统计关系的分析。这种统计关系，通常用相关函数来描述。对于平稳随机过程，相关函数又随着时间坐标的移动（简称时差或时延）而变化。相关函数一般包括自相关函数和互相关函数。

自相关函数的意义如下：

（1）表示现在的波形（或图象）与时间坐标移动了 τ 之后的波形（或图象）之间的相似程度。

（2）建立随机过程一个时刻的幅值（或图象）与另一个时刻幅值（或图象）之间的依赖关系。

（3）给出观察的时间过程 T 内，同一随机过程中相隔时间为 τ 的两个幅值乘积的集合平均值。

自相关函数有以下几个主要用途：

（1）可以检测混淆于随机过程中的周期性信息。

（2）可以定量地知道信号的总能量、静态分量、动态分量以及所含的频率成分是丰富、宽广还是贫乏、窄小。

（3）描述过程随时延坐标变化的相关性。

互相关函数的意义如下：

（1）表示两个随机波形（或图象）之间的相关程度与时延坐标的关系。

（2）给出观察时间过程 T 内，两不同随机过程中相隔时间为 τ 的两个幅值乘积的集合平均值。

由于互相关函数比自相关函数提供更多的信息，因而更为重

要，也应用得更为广泛。其重要用途为：

(1) 捡拾与回收噪声中的信号；

(2) 测量滞后时间；

(3) 确定传递通道；

(4) 确定各振源在振动响应中所占的比重。

一、内容提要

1．直线回归方程

相关的随机变量 x 和 y 的回归关系可用最小二乘法确定。

x 依 y 的回归方程：

$$\frac{x-m_x}{\sigma_x}=\left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{y-m_y}{\sigma_y}. \tag{3-1}$$

y 依 x 的回归方程：

$$\frac{y-m_y}{\sigma_y}=\left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{x-m_x}{\sigma_x}. \tag{3-2}$$

上两式中 m_x，σ_x，m_y，σ_y 分别为随机变量 x 和 y 的均值和标准离差。$E[(x-m_x)(y-m_y)]$称为随机变量 x 和 y 的协方差（相关矩）。以上两式都表示直线方程。

2．自相关函数

同一随机过程在时刻 t_1 和 t_2 的两个实随机变量 $x(t_1)$ 与 $x(t_2)$ 之乘积的集合平均，即

$$\phi_{xx}(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)], \tag{3-3}$$

称为自相关函数。

对平稳随机过程，自相关函数只与两时刻之差值 τ 有关，与 t_1，t_2 的具体值无关，故 $\phi_{xx}(t_1,t_2)$可记作 $\phi_{xx}(\tau)$，则有

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=E[x_1(t)x_2(t+\tau)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2)dx_1dx_2,\end{aligned} \tag{3-4}$$

式中，$p(x_1,x_2)$ 为 t 和 $(t+\tau)$ 时刻的随机变量 x_1 和 x_2 的联合概率密度函数。

对各态历经过程，自相关函数又等于单个样本函数上 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 的时间平均

$$\phi_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt, \tag{3-5}$$

自相关函数的主要数学性质如下：

(1) 若随机过程中的变量是实数，则 $\phi_{xx}(\tau)$ 是实偶函数，即 $\phi_{xx}(\tau)=\phi_{xx}(-\tau)$。若随机过程中的变量是复数，则 $\phi_{xx}(\tau)$ 一般是复数，且有 $\phi_{xx}(\tau)=\phi_{xx}^*(-\tau)$，这里 * 表示共轭。

(2) 在 $\tau=0$ 时，自相关函数为最大值，且等于均方值，即

$$\phi_{xx}(0)=\phi_{xx}(\tau)_{max}=E[x^2]=\psi_x^2.$$

(3) 在 $\tau=\infty$ 时，自相关函数趋近于平均值的平方，即

$$\lim_{\tau\to\infty}\phi_{xx}(\tau)=\phi_{xx}(\pm\infty)=m_x^2.$$

(4) 自相关函数是有界的，即

$$-\sigma_x^2+m_x^2\leqslant\phi_{xx}(\tau)\leqslant\sigma_x^2+m_x^2.$$

(5) 如果随机信号 $x(t)$ 由噪音信号 $n(t)$ 和与之不相关的信号 $\lambda(t)$ 组成，则有

$$\phi_{xx}(\tau)=\phi_{\lambda\lambda}(\tau)+\phi_{nn}(\tau).$$

3．互相关函数

若考虑的时刻为 $t_1=t$，$t_2=t+\tau$，则两个实随机过程 X 和 Y 之间的互相关函数为

$$\begin{cases}\phi_{xy}(t_1,t_2)=E[x(t)y(t+\tau)],\\ \phi_{yx}(t_1,t_2)=E[y(t)x(t+\tau)].\end{cases} \tag{3-6}$$

与自相关函数类似，两个实平稳随机过程的互相关函数为：

$$\begin{cases}\phi_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t+\tau)]\\ \qquad=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1y_2p(x_1,y_2)dx_1dy_2,\\ \phi_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_2y_1p(x_2,y_1)dx_2dy_1.\end{cases} \tag{3-7}$$

对于各态历经过程，互相关函数可用单个样本的时间历程来

平均，即

$$\phi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt. \qquad (3-8)$$

互相关函数的主要数学性质如下：

(1) 互相关函数不是 τ 的偶函数，即

$$\phi_{xy}(\tau)\neq\phi_{xy}(-\tau),$$

而是

$$\phi_{xy}(\tau)=\phi_{yx}(-\tau).$$

对于两个复函数的复互相关有

$$\phi_{xy}(\tau)=\phi_{yx}^*(-\tau),$$

$$\phi_{yx}(\tau)=\phi_{xy}^*(-\tau),$$

式中 * 为共轭记号。

(2) 互相关函数与协方差（或相关矩）$C_{xy}(\tau)$之间的关系为：

$$\phi_{xy}(\tau)=C_{xy}(\tau)-m_x m_y,$$

$$\phi_{yx}(\tau)=C_{yx}(\tau)-m_y m_x.$$

(3) 互相关函数是有界的，即

$$(-\sigma_x\sigma_y+m_x m_y)\leq\phi_{xy}(\tau)\leq(\sigma_x\sigma_y-m_x m_y).$$

(4) 在 $\tau=\infty$ 时，一般 x 与 y 之间不存在相关性，所以

$$\phi_{xy}(\tau\to\infty)\longrightarrow m_x m_y,$$

$$\phi_{yx}(\tau\to\infty)\longrightarrow m_y m_x.$$

(5) 互相关函数的最大值一般不在 $\tau=0$ 处。

4. 计算相关函数的步骤

(1) 对各态历经过程，取一个相当长时间的样本函数（对周期函数可取一个周期），分区写出函数关系式

(2) 若样本函数可用数学式表达，则可用时间平均法通过积分计算自相关函数或互相关函数，见（3-5）和（3-8）式。

(3) 若样本函数不能用数学式表达，则积分式只能用有限的求和式来代替。将样本函数用时间间隔 Δt 分隔成一系列不连续

的离散值，若采样时间为 T，则样点数为 $N=\frac{T}{\Delta t}+1$，于是自相关函数为：

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)x_i(t+\tau),$$

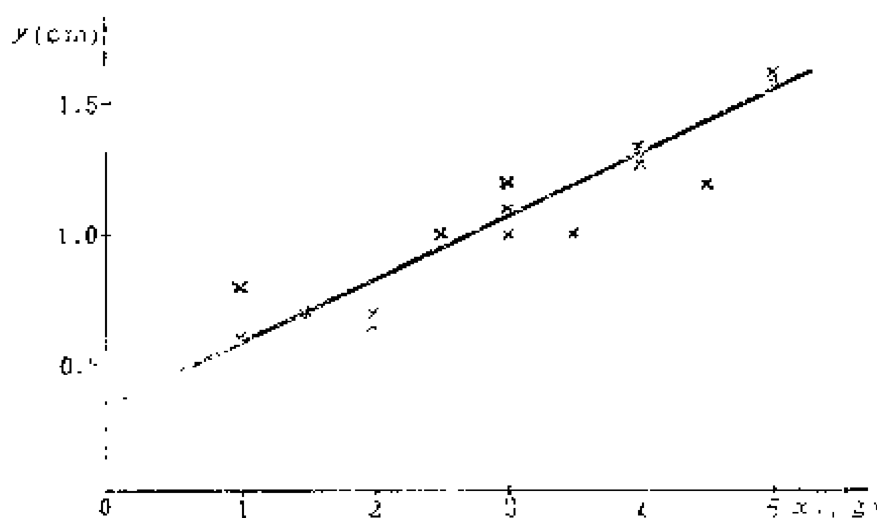
这里，τ 应取 Δt 的整数倍。互相关函数的求法与此类似。在这种情况下，由于计算工作量大，这一工作通常由计算机或信号处理机来完成。

二、例　　题

例题 3-1 设 x 表示弹簧所承受的重量（公斤），y 表示弹簧缩短的位移（厘米），从多次实验观察到的 (x,y) 值有下面 20 对：(1, 0.5)，(1, 0.8)，(1, 0.6)，(1.5, 0.7)，(2, 0.7)，(2, 0.65)，(2, 0.71)，(2.5, 1.0)，(3, 1.1)，(3, 1.2)，(3, 1.0)，(3.5, 1.0)，(4, 1.3)，(4, 1.29)，(4, 1.32)，(4.5, 1.2)，(5, 1.6)，(5, 1.62)，(5, 1.64)，(5.5, 1.7)，求

(a) 弹簧所受压力与变形的散布图

(b) 检验相关系数 ρ_{xy} 是否显著不为零。



例题图 3-1-1

例题表 3-1-1

	x_i	y_i	(x_i-m_x)	(y_i-m_y)	$(x_i-m_x)^2$	$(y_i-m_y)^2$	$(x_i-m_x)\times(y_i-m_y)$
1	1	0.5	−2.125	−0.5815	4.52	0.3381	1.236
2	1	0.8	−2.125	−0.2815	4.52	0.0792	0.598
3	1	0.6	−2.125	−0.4815	4.52	0.232	1.023
4	1.5	0.7	−1.625	−0.3815	2.64	0.146	0.620
5	2	0.7	−1.125	−0.3815	1.27	0.146	0.429
6	2	0.65	−1.125	−0.4315	1.27	0.186	0.485
7	2	0.71	−1.125	−0.3715	1.27	0.138	0.418
8	2.5	1.0	−0.625	−0.0815	0.39	0.007	0.051
9	3	1.1	−0.125	+0.0185	0.016	0.0003	−0.002
10	3	1.2	−0.125	+0.1185	0.016	0.014	−0.015
11	3	1.0	−0.125	−0.0815	0.016	0.007	0.01
12	3.5	1.0	+0.375	−0.0815	0.141	0.007	−0.031
13	4	1.3	+0.875	+0.2185	0.766	0.048	0.191
14	4	1.29	+0.875	+0.2085	0.766	0.043	0.182
15	4	1.32	+0.875	+0.2385	0.766	0.057	0.209
16	4.5	1.2	+1.375	+0.1185	1.89	0.014	0.163
17	5	1.6	+1.875	+0.5185	3.52	0.269	0.972
18	5	1.62	+1.875	+0.5385	3.52	0.289	1.011
19	5	1.64	+1.875	+0.5585	3.52	0.312	1.047
20	5.5	1.7	+2.375	+0.6185	5.64	0.383	1.469
$\sum$	62.5	21.65	0	0	39.94	2.72	10.066

(c) x 与 y 的直线回归方程。

(d) 当 $x=2.1$ 公斤时，试预估弹簧的压缩变形。

(e) 当 $y=1.4$ 厘米时，试计算载荷值。

解：(a) 所画散布图如例题图 3-1-1 所示。

(b) 首先列出计算表，见例题表 3-1-1。

$$m_x=\frac{\sum x_i}{20}=3.125(\text{公斤}),$$

$$m_y=\frac{\sum y_i}{20}=1.0815(\text{厘米}),$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-m_x)^2=2\,(\text{公斤}^2),$$

$$\sigma_x=1.414(\text{公斤}),$$

$$\sigma_y^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(y_i-m_y)^2=0.1358\,(\text{厘米}^2),$$

$$\sigma_y=0.3684(\text{厘米}),$$

$$C_{xy}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-m_x)(y_i-m_y)=0.5033(\text{公斤·厘米}).$$

互相关系数

$$\rho_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{0.5033}{1.414\times0.3684}=0.966.$$

(c) 求回归关系

由于 x 与 y 的相关系数不是接近于零而是接近于 1，所以可以建立 x 与 y 的直线回归关系。代公式有

$$\frac{(y-1.0815)}{0.3684}=0.966\frac{(x-3.125)}{1.414},$$

所以，x 与 y 的回归方程为

$$y=0.2517x+0.2950.$$

(d) $y=0.8236$(厘米).

(e) $x=1.39$(公斤).

讨论：对于变形和载荷之间的关系可近似用直线表示的弹簧，称为线性弹簧；两者的关系只能用曲线表示的弹簧称为非线性弹簧。非线性弹簧又有硬弹簧和软弹簧之分，涉及弹簧线性与否的实验方法，由于实验过程免不了有误差，所以要将数据描成曲线，必须用回归分析方法。

例题 3-2 (a) 若 x 为随机变量，c 为任意常数，试证明 $E[(x-c)^2]$之最小值为 σ_x^2.

(b) 若 x 和 y 为两个相关随机变量，其平均值分别为 m_x 和 m_y，方差为 σ_x^2，σ_y^2. 试证明 (3-1) 式给出了 x 依 y 的回归线，(3-2)式给出了 y 依 x 的回归线.

(c) 设 x 和 y 皆为连续高斯随机变量，平均值皆为零。画出（近似地）其联合概率密度函数，取横坐标为 x/σ_x，纵坐标为 y/σ_y。试证明当 $\rho=0$ 时，概率密度函数曲面为轴对称圆钟形，$\rho\neq0$ 时，轴对称的圆钟形发生畸变，通过钟轴的两对称平面与 x-y 平面的交线对 x/σ_x 轴的夹角分别为 45° 和 135°. 再证明在 x/σ_x 对 y/σ_y 图上，y 依 x 和 x 依 y 的回归线被概率密度曲面的对称平面等分。

解：(a) 方法 1

$$\frac{d}{dc}E[(x-c)^2]=\frac{d}{dc}[E[x^2]-2cE[x]+c^2]$$

$$=2[c-E[x]],$$

令

$$\frac{d}{dc}E[(x-c)^2]=0,$$

得

$$c=E[x]=m_x.$$

又

$$\frac{d^2}{dc^2}E[(x-c)^2]=2>0,$$

∴ $c=E[x]$时有极小值,

且 $E[(x-c)^2]_{min}=E[(x-E[x])^2]$

$$=E[x^2]-2(E[x])^2+(E[x])^2$$

$$=E[x^2]-(E[x])^2=\sigma_x^2.$$

方法 2

$$E[(x-c)^2]=E[x^2]-2cE[x]+c^2$$

$$=E[x^2]-(E[x])^2+(E[x])^2-2cE[x]+c^2$$

$$=\sigma_x^2+\{E[x]-c\}^2,$$

因为

$$\{E[x]-c\}^2\geqslant 0,$$

所以 $E[(x-c)^2]$的最小值是σ_x^2,且此最小值在$c=E[x]$时取得。

(b) 方法 1

设 y 依 x 的回归方程为

$$y=kx+b. \tag{1}$$

则任意一个 y 值和预计值$(kx-b)$的偏差为

$$\Delta=y-(kx+b),$$

$$E[\Delta^2]=E[(y-kx-b)^2]$$

$$=E[y^2]+x^2E[x^2]+b^2-3kE[x\cdot y]-2bE[y]$$

$$+2kbE[x].$$

令

$$\frac{\partial}{\partial k}E[\Delta^2]=0,\ \frac{\partial}{\partial b}E[\Delta^2]=0,$$

得

$$\begin{cases} kE[x^2]-E[x\cdot y]+bE[x]=0, \\ b-E[y]+kE[x]=0. \end{cases}$$

解得

$$k=\frac{E[x\cdot y]-E[x]\cdot E[y]}{E[x^2]-(E[x])^2}$$

$$=\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x^2}. \tag{2}$$

$$b=\frac{E[x^2]E[y]-E[x]E[x\cdot y]}{E[x^2]-(E[x])^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma_x^2}\{E[x^2]E[y]-(E[x])^2E[y]+$$

$$(E[x])^2E[y]-E[x]E[x\cdot y]\}$$

$$=\frac{1}{\sigma_x^2}\{E[y]\sigma_x^2+E[x](E[x]E[y]-E[x\cdot y])\}$$

$$=m_y-m_x\cdot\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x^2}. \tag{3}$$

把 k，b 值代入(1)式，得

$$y-m_y=\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x^2}(x-m_x),$$

即

$$\frac{y-m_y}{\sigma_y}=\left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{x-m_x}{\sigma_x}. \tag{4}$$

同理可证，x 依 y 的回归线方程为

$$\frac{x-m_x}{\sigma_x}=\left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{y-m_y}{\sigma_y}. \quad (5)$$

方法 2

引进新的随机变量

$$x_1=x-m_x, \quad (6)$$

$$y_1=y-m_y. \quad (7)$$

则显见，x_1 和 y_1 具有零均值，因而 y_1 依 x_1 的回归线通过原点，其方程为

$$y_1=k_1x_1, \quad (8)$$

任意一个 y_1 值与预计值 k_1x_1 的偏差

$$\Delta_1=y_1-k_1x_1,$$

$$\therefore \quad E[\Delta_1^2]=E[(y_1-k_1x_1)^2]$$

$$=E[y_1^2]-k_1^2E[x_1^2]-2k_1E[x_1\cdot y_1].$$

令

$$\frac{\partial}{\partial k_1}E[\Delta^2]=0,$$

解得

$$k_1=\frac{E[x_1\cdot y_1]}{E[x_1^2]}.$$

代入(8)式得

$$y_1=\frac{E[x_1\cdot y_1]}{E[x_1^2]}x_1=\frac{E[x_1\cdot y_1]}{\sigma_{x_1}^2}x_1$$

$$\left(\begin{array}{ll}\because & x_1\text{的均值为零} \\ \therefore & \sigma_{x_1}^2=E\left[x_1^2\right]\end{array}\right),$$

或

$$\frac{y_1}{\sigma_{y_1}}=\left\{\frac{E[x_1\cdot y_1]}{\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}}\right\}\frac{x_1}{\sigma_{x_1}}. \tag{9}$$

又由于

$$\begin{cases}\sigma_{x_1}^2=E[x_1^2]=E[(x-m_x)^2]=\sigma_x^2, \\ \sigma_{y_1}^2=\sigma_y^2.\end{cases} \tag{10}$$

将(6)、(7)及(10)式代入(9)式，就是第(4)式。

(c) 因为 $m_x=0$，$m_y=0$，所以联合概率密度函数简化为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}-2\rho_{xy}\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}\right)\right\}. \tag{11}$$

其图形如例题图 3-2-1 所示。当 $\rho_{xy}=0$ 时，

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}, \tag{12}$$

用平行于 $x-y$ 的平面去截概率曲面，显然得到的截面图形

$$\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2=c^2, \tag{13}$$

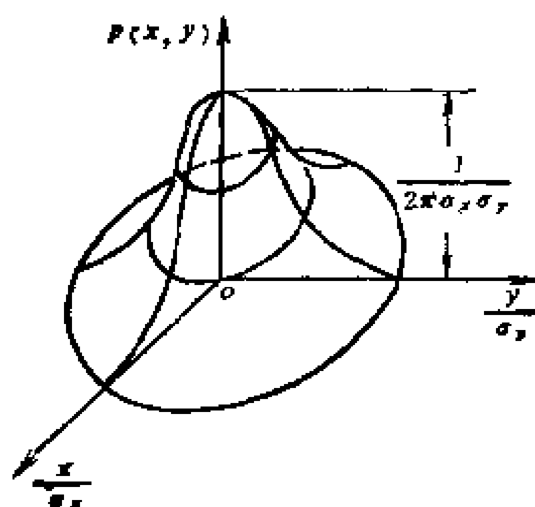
是以截面与铅垂轴的交点为中心的圆。又因为

$$p(-x,-y)=p(x,y), \tag{14}$$

所以概率密度函数曲面是轴对称的，即在 $\rho=0$ 时，概率密度函

数曲面是轴对称的圆钟形。

当$\rho \neq 0$时，(14)式仍成立，轴对称性保持不变，但平行于x-y平面的截面截得的图形已不是圆形，而是中心在$p(x, y)$轴上，但对称轴转了一个角度的斜椭圆，椭圆截面对称轴转过的角度就是通过钟轴的对称平面与x-y平面的交线对x/σ_x轴的夹角。令



例题图 3-2-1

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}-2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y}=c, \tag{15}$$

或记 $x/\sigma_x=x_1$，$y/\sigma_y=y_1$则上式表示为

$$x_1^2+y_1^2-2\rho x_1 y_1=c, \tag{16}$$

代入转轴变换公式

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha,\\ y_1&=x_2\sin\alpha+y_2\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

将(17)式代入(16)式，得

$$x_2^2\cos^2\alpha-2x_2y_2\cos\alpha\sin\alpha+y_2^2\sin^2\alpha+$$
$$+x_2^2\sin^2\alpha+2x_2y_2\cos\alpha\sin\alpha+y_2^2\cos^2\alpha$$
$$-2\rho(x_2^2\sin\alpha\cos\alpha-x_2y_2\sin^2\alpha+x_2y_2\cos^2\alpha-y_2^2\sin\alpha\cos\alpha)=c.$$

令耦合项

$$-2\rho(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)x_2y_2=0,$$

得

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0,$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha=1$$
$$\therefore \qquad \alpha=45^\circ,\ 或\ \alpha=135^\circ. \tag{18}$$

这就证明了椭圆截面的对称轴与x/σ_x轴的夹角是45°或135°。

记 y 依 x 的回归线方程为(考虑 x_1，y_1 的均值都为零)：

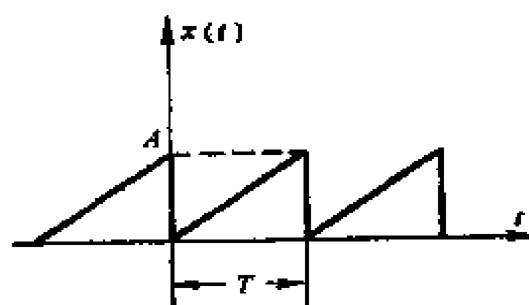
$$\frac{y_1}{\sigma_y}=\rho_{xy}\cdot\frac{x_1}{\sigma_x},\tag{19}$$

又由于 x 和 y 的均值为零，故 y 依 x 的回归线和 x 依 y 的回归线均过原点，可用下式表示

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{\sigma_y}&=\rho_{xy}\frac{x}{\sigma_x},\\\frac{x}{\sigma_x}&=\rho_{xy}\frac{y}{\sigma_y}.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

而前面已证过，概率曲面的对称平面，不管 ρ_{xy} 等于零与否都是过原点的，所以回归线被对称平面等分。

例题 3-3 求例题图 3-3-1 所示锯齿形波的时间平均和自相关函数图。



例题图 3-3-1

解：从图可见，周期为 T 的波形方程：

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{T}t & (0\leqslant t\leqslant T),\\[2mm]\dfrac{A}{T}t-A & (T\leqslant t\leqslant 2T).\end{cases}$$

(1) 求平均值

$$m_x=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A}{T}tdt=\frac{A}{2}.\tag{1}$$

(2) 求自相关函数

方法 1

应用随机过程的平稳各态历经特性，任意一个样本函数可完全代表整个随机过程。故只需对单个样本函数进行时间平均。将测量时间 t_0 当成沿时间轴均匀分布的随机变量，这时

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=E[x(t_0)x(t_0+\tau)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)x(t_0+\tau)p(t_0)dt_0.\end{aligned}\tag{2}$$

因为 $x(t)$ 为周期函数，只需考虑时间历程的一个周期即可，即 t_0 值的区间由 0 到 T，且

$$p(t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & (0\leqslant t_0\leqslant T),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases} \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式，得

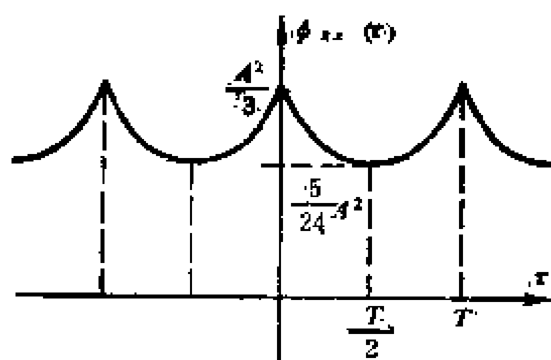
$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau) &= \int_0^T x(t_0)\,x(t_0+\tau)\frac{1}{T}dt_0\\ &=\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T-\tau}\frac{A}{T}t_0\cdot\frac{A}{T}(t_0+\tau)dt_0+\right.\\ &\quad\left.+\int_{T-\tau}^{T}\frac{A}{T}t_0\left[\frac{A}{T}(t_0+\tau)-A\right]dt_0\right\}\\ &=\frac{1}{T}\left\{\frac{A^2}{T^2}\left[\frac{t_0^3}{3}+\frac{t_0^2}{2}\tau\right]_0^{T-\tau}+\frac{A^2}{T^2}\left[\frac{t_0^3}{3}+\frac{t_0^2}{2}(\tau-T)\right]_{T-\tau}^{T}\right\}\\ &=\frac{A^2}{T^3}\left\{\frac{(T-\tau)^2}{2}T+\frac{T^3}{3}+\frac{T^2}{2}(\tau-T)\right\}\\ &=\frac{A^2}{T^2}\left[\frac{\tau}{2}(\tau-T)+\frac{T^2}{3}\right]\qquad(0\leqslant\tau\leqslant T).\end{aligned}\tag{4}$$

对(4)式求导数，即

$$\phi'_{xx}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\phi_{xx}(\tau),$$

并令上式等于零，得

$$\tau=\frac{1}{2}T.$$



例题图 3-3-2

又二阶导数

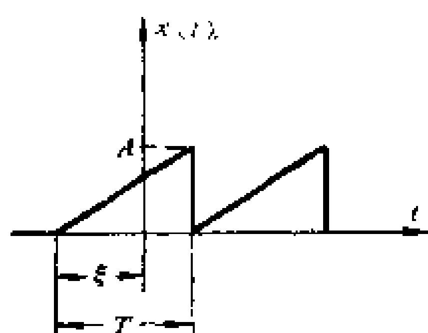
$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\phi_{xx}(\tau)\right]=\frac{A^2}{T^2}>0,$$

所以 $\phi_{xx}(\tau)$ 在 $\tau=\frac{1}{2}T$ 处有极小值，即

$$\phi_{xx}(\tau)\Big|_{\min}=\frac{5}{24}A^2. \tag{5}$$

方法 2

求集合平均，集合由各样本函数在两个固定时刻 t_0 和 $t_0+\tau$ 上的值组成。此时各样本的 ξ 值（见例题图 3-3-3）为随机变量，且



例题图 3-3-3

$$p(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{T} & (0\leqslant\xi\leqslant T),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

故

$$E[x(t_0)x(t_0+\tau)]$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_0)x_i(t_0+\tau), \tag{6}$$

式中 N 为样本个数。

显然，取得任何一个样本是等可能的，其概率 $P_i=\frac{1}{N}$，这样，(6)式也可写成

$$E[x(t_0)x(t_0+\tau)]=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_0)x_i(t_0+\tau)P_i. \tag{7}$$

既然各样本的区别在于 ξ 值，则 P_i 由取得某 ξ 值的概率决定。将各样本按 ξ 不同分类，可求出 ξ 在某特定值 ξ_0 附近，即 $\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_0+d\xi_0$ 的概率为

$$P_i=\text{Prob}(\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_0+d\xi_0)$$
$$=p(\xi_0)d\xi_0, \tag{8}$$

样本这样分类后，当 $d\xi_0\to0$，而 $N\to\infty$ 时，(7) 式的求和式可用积分式代替．考虑到 ξ_0 的变化区间为 0—T，并略去供鉴别用的脚标“0”，得

$$E[x(t_0)x(t_0+\tau)]=\int_0^T x(t_0)x(t_0+\tau)\cdot\frac{1}{T}d\xi, \tag{9}$$

(9) 式中

$$x(t_0)=\frac{A}{T}(t_0+\xi) \qquad (-\xi\leqslant t_0\leqslant T-\xi), \tag{10}$$

这里 t_0 是任选的固定时刻，又由于各态历经过程的自相关函数与所取的时刻无关，若取 $t_0=0$，于是(9) 式成为

$$E[x(t_0)x(t_0+\tau)]=\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T-\tau}\frac{A}{T}\xi\cdot\frac{A}{T}(\xi+\tau)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_{T-\tau}^{T}\frac{A}{T}\xi\left[\frac{A}{T}(\xi+\tau)-A\right]d\xi\right\}$$

用不同的思想方法，得出了和(4) 式的第二步相同的结果。

讨论：

(1) 周期函数的自相关函数仍为周期函数，且两者的周期相同。

(2) 当 $\tau=kT(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 时，$\phi_{xx}(\tau)$ 取得极大值，即波形的相关程度最大；而当 $\tau=\left(k+\frac{1}{2}\right)T(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 时，$\phi_{xx}(\tau)$ 为最小值，即波形的相关程度最小。

例题 3-4 导出习题 2-16 所定义的平稳随机过程 $X[t]$的自相关函数。

解：为方便起见，先研究 $X[t]$只包括两项的情况，即

$$x_r(t)=A_{1r}\cos(m_{\omega_0}t+\theta_{1r})+A_{2r}\cos(2\,m_{\omega_0}t+\theta_{2r}), \tag{1}$$

$$x_r(t+\tau)=A_{1r}\cos[m_{\omega_0}(t+\tau)+\theta_{1r}]+$$

$$+A_{2r}\cos[2\,m_{\omega_0}(t+\tau)+\theta_{2r}].$$

$$(r=1,2,\cdots) \tag{2}$$

式中 A_1，A_2 可看作独立同分布的随机变量，A_{1r}，A_{2r} 分别为它们的第 r 个样本值。θ_{1r}、θ_{2r} 的意义与此类似。

根据自相关函数的定义和求集合平均值的公式：

$$E[x(t)x(t+\tau)]=$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\iint_0^{2\pi}x(t)x(t+\tau)p(\theta_1,\ \theta_2,\ A_1,\ A_2)\,d\theta_1 d\theta_2 dA_1 dA_2,$$

式中

$$p(\theta_1,\ \theta_2,\ A_1,\ A_2)=p(\theta_1)\cdot p(\theta_2)\cdot p(A_1)\cdot p(A_2), \tag{4}$$

$$p(\theta_1)=p(\theta_2)=p(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi), \\ 0 & (\text{其它}).\end{cases} \tag{5}$$

$$p(A_1)=p(A_2)=p(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_A}e^{-\frac{(A-m_A)^2}{2\sigma_A^2}}$$

$$(-\infty<A<\infty). \tag{6}$$

将(1)、(2)式(不带脚标 r 的)和(4)、(5)、(6)式代入(3)式，利用三角函数的正交性，积分得：

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\frac{1}{2}(\sigma_A^2+m_A^2)(\cos m_{\omega_0}\tau+\cos 2\ m_{\omega_0}\tau), \tag{7}$$

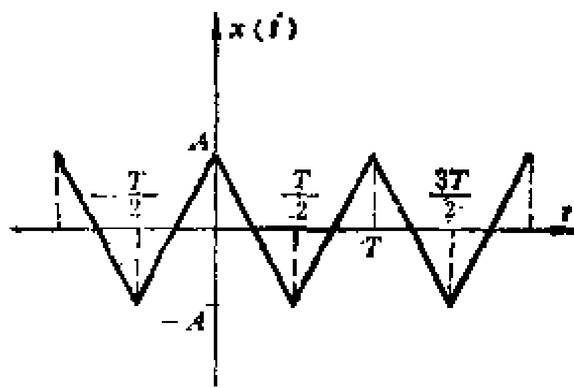
由此不难推广到 $n=10$ 的情况：

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\frac{1}{2}(\sigma_A^2+m_A^2)\sum_{n=1}^{10}\cos n m_{\omega_0}\tau. \tag{8}$$

此即平稳随机过程 $X[t]$的自相关函数。显然，它与时间 t 无关。

例题 3-5 求图示三角形波的自相关函数。

解：$x(t)$的表达式为：



例题图 3-5-1

$$
x(t)=\begin{cases}
A-\dfrac{4A}{T}t & \left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2}\right),\\[2mm]
-3A+\dfrac{4A}{T}t & \left(\dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T\right),\\[2mm]
5A-\dfrac{4A}{T}t & \left(T\leqslant t\leqslant \dfrac{3}{2}T\right),\\[2mm]
-7A+\dfrac{4A}{T}t & \left(\dfrac{3T}{2}\leqslant t\leqslant 2T\right).
\end{cases}
$$

为求时间平均值，采用类似于例题 3-3 的方法，得

$$
\phi_{xx}(\tau)=\int_0^T x(t_0)x(t_0+\tau)\frac{1}{T}dt_0,
$$

当 $0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{T}{\tau}$时，

$$
x(t_0)x(t_0+\tau)=\left\{\begin{array}{l}
\left[A-\dfrac{4A}{T}t\right]\left[A-\dfrac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]\\[2mm]
\qquad 若\left(0\leqslant t_0\leqslant\dfrac{T}{2}\right)，且\left(0\leqslant t_0+\tau\leqslant\dfrac{T}{2}\right),\\[2mm]
\qquad 即\left(0\leqslant t_0\leqslant\dfrac{T}{2}-\tau\right),\\[2mm]
\left[A-\dfrac{4A}{T}t_0\right]\left[-3A+\dfrac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]\\[2mm]
\qquad 若\left(0\leqslant t_0\leqslant\dfrac{T}{2}\right)，且\left(\dfrac{T}{2}\leqslant t_0+\tau\leqslant T\right),\\[2mm]
\qquad 即\left(\dfrac{T}{2}-\tau\leqslant t_0\leqslant\dfrac{T}{2}\right),\\[2mm]
\left[-3A+\dfrac{4A}{T}t_0\right]\left[-3A+\dfrac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]\\[2mm]
\qquad 若\left(\dfrac{T}{2}\leqslant t_0\leqslant T\right)，且\left(\dfrac{T}{2}\leqslant t_0+\tau\leqslant T\right),\\[2mm]
\qquad 即\left(\dfrac{T}{2}\leqslant t_0\leqslant T-\tau\right),\\[2mm]
\left[-3A+\dfrac{4A}{T}t_0\right]\left[5A-\dfrac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]
\end{array}\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\qquad 若\left(\frac{T}{2}\leqslant t_0\leqslant T\right)，且\left(T\leqslant t_0+\tau\leqslant\frac{3}{2}T\right)，\\
\qquad 即(T-\tau\leqslant t_0\leqslant T).
\end{array}
\right.
$$

当 $\frac{T}{2}\leqslant\tau\leqslant T$时，

$$
x(t_0)x(t_0+\tau)=\left\{
\begin{array}{l}
\left[A-\frac{4A}{T}t_0\right]\left[-3A+\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]\\
\qquad 若\left(0\leqslant t_0\leqslant\frac{T}{2}\right)，且\left(\frac{T}{2}\leqslant t_0+\tau\leqslant T\right)，\\
\qquad 即(0\leqslant t_0\leqslant T-\tau)，\\
\left[A-\frac{4A}{T}t_0\right]\left[5A-\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]\\
\qquad 若\left(0\leqslant t_0\leqslant\frac{T}{2}\right)，且\left(T\leqslant t_0+\tau\leqslant\frac{3T}{2}\right)，\\
\qquad 即\left(T-\tau\leqslant t_0<\frac{T}{2}\right)，\\
\left[-3A+\frac{4A}{T}t_0\right]\left[5A-\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]\\
\qquad 若\left(\frac{T}{2}\leqslant t_0\leqslant T\right)，且\left(T\leqslant t_0+\tau\leqslant\frac{3T}{2}\right)，\\
\qquad 即\left(\frac{T}{2}\leqslant t_0\leqslant\frac{3T}{2}-\tau\right)，\\
\left[-3A+\frac{4A}{T}t_0\right]\left[-7A+\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]，\\
\qquad 若\left(\frac{T}{2}\leqslant t_0\leqslant T\right)，且\left(\frac{3T}{2}\leqslant t_0+\tau\leqslant 2T\right)，\\
\qquad 即\left(\frac{3T}{2}-\tau\leqslant t_0\leqslant T\right).
\end{array}
\right.
$$

所以，当 $0\leqslant\tau\leqslant\frac{T}{2}$时，得

$$
\phi_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}-\tau}\left[A-\frac{4A}{T}t_0\right]\left[A-\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0+\right.
$$

$$+\int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}}\left[A-\frac{4A}{T}t_0\right]\left[-3A+\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0+$$

$$+\int_{\frac{T}{2}}^{T-\tau}\left[-3A+\frac{4A}{T}t_0\right]\left[-3A+\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0+$$

$$+\int_{T-\tau}^{T}\left[-3A+\frac{4A}{T}t_0\right]\left[5A-\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0\Big\}$$

$$=A^2\left[\frac{1}{3}-8\left(\frac{\tau}{T}\right)^2+\frac{32}{3}\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right].$$

当$\frac{T}{2}\leqslant\tau\leqslant T$时，得

$$\phi_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\Big\{\int_0^{T-\tau}\left[A-\frac{4A}{T}t_0\right]\left[-3A+\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0+$$

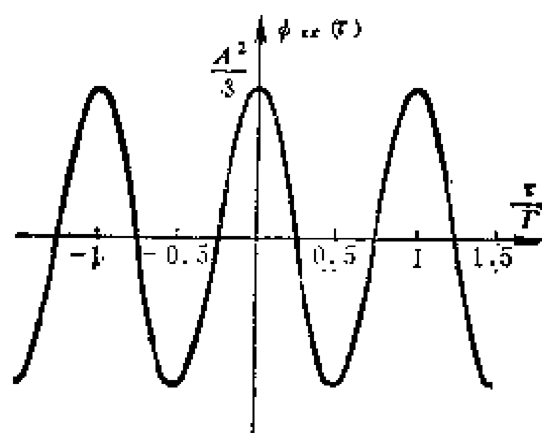
$$+\int_{T-\tau}^{\frac{T}{2}}\left[A-\frac{4A}{T}t_0\right]\left[5A-\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0+$$

$$+\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{2}-\tau}\left[-3A+\frac{4A}{T}t_0\right]\left[5A-\frac{4A}{T}(t_0+\tau)\right]dt_0+$$

$$+\int_{\frac{3T}{2}-\tau}^{T}\left[-3A+\frac{4A}{T}t_0\right]\left[-7A+\frac{4A}{T}(t_0+\tau_0)\right]dt_0\Big\}$$

$$=A^2\left[3-16\frac{\tau}{T}+24\left(\frac{\tau}{T}\right)^2-\frac{32}{3}\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right].$$

绘出$\phi_{xx}(\tau)$对$\frac{\tau}{T}$曲线如例题图 3-5-2 所示. 由图可见，$\phi_{xx}(\tau)_{max}=\frac{1}{3}A^2$，$\phi_{xx}(\tau)_{min}=-\frac{1}{3}A^2$



例题图 3-5-2

讨论：本题中函数$x(t)$是连续的偶函数，

但在前半周期和后半周期中，要用不同的函数式表达。可以发现，得到的自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$也具有这些特征。

例题 3-6 $x_k[t]=\{x_0\cos\omega t+\theta(k)\}$ 为余弦波随机过程，其中 x_0 和 ω 是常数，$\theta(k)$是在过程的时间 $(0,2\pi)$ 上具有均匀概率密度函数 $p(\theta)$的随机变量，求该余弦函数的自相关函数。

解：对指定的时刻 t

$$x_k[t]=x_0\cos(\omega t+\theta)=x_1(\theta),$$

$$x_k[t+\tau]=x_0\cos[\omega(t+\tau)+\theta]=x_2(\theta).$$

故自相关函数

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=E[x_k(t)x_k(t+\tau)]\\&=E[x_1(\theta)x_2(\theta)].\end{aligned}$$

由于概率密度曲线下的面积要等于 1，则$(0,2\pi)$ 上的均匀概率密度函数应为

$$p(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

所以

$$\phi_{xx}(\tau)=\frac{x_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cos[\omega(t+\tau)+\theta]d\theta,$$

利用 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$的三角关系，则

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=\frac{x_0^2}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(-\omega\tau)+\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)]d\theta\\&=\frac{x_0^2}{2}\cos\omega\tau.\end{aligned}$$

讨论：余弦函数的自相关函数仍为余弦函数。类似地，不难证明，正弦函数的自相关函数亦为余弦函数。

例题 3-7 考虑随机过程 $X[t]$，在此过程每个元的每一时间段 $n\Delta e<t<(n+1)\Delta e$ 内，过程以同等的概率取得 $+A$ 或 $-A$

值，n 为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整数，试求过程的自相关函数 $E[x(t)x(t-\tau)]$。并证明此过程是否平稳。

解：当 $n\Delta\varepsilon<t<(n+1)\Delta\varepsilon$，且 $n\Delta\varepsilon<(t+\tau)<(n+1)\Delta\varepsilon$，即 t 和 $t+\tau$ 处于同一时间段内时，显然 $E[x(t)x(t-\tau)]=A^2$；当 t 与 $t+\tau$ 不在同一时间段内时，$E[x(t)x(t+\tau)]$ 可能为 A^2 或 $-A^2$，取得这两种值的可能性各为 $\frac{1}{2}$，所以此时

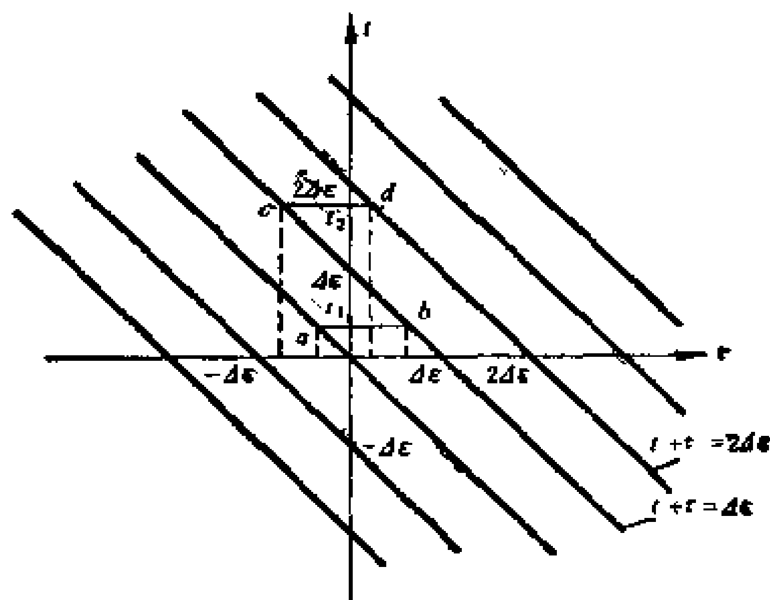
$$E[x(t)x(t+\tau)]=A^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-A^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

综合起来，对于 $n\Delta\varepsilon<t<(n+1)\Delta\varepsilon$，

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\begin{cases}A^2 & (n\Delta\varepsilon<t+\tau<(n+1)\Delta\varepsilon),\\ 0 & (t+\tau<n\Delta\varepsilon)\text{或}(t+\tau>(n+1)\Delta\varepsilon).\end{cases}$$

由上式可见 $E[x(t)x(t+\tau)]$ 与 t 有关，过程是非平稳的。

例题图 3-7-1 表明，当 $t=t_1$ 时，



例题图 3-7-1

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\begin{cases}A^2 & (a<\tau<b),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

当 $t=t_2$ 时，

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\begin{cases}A^2 & (c\leqslant\tau\leqslant d),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

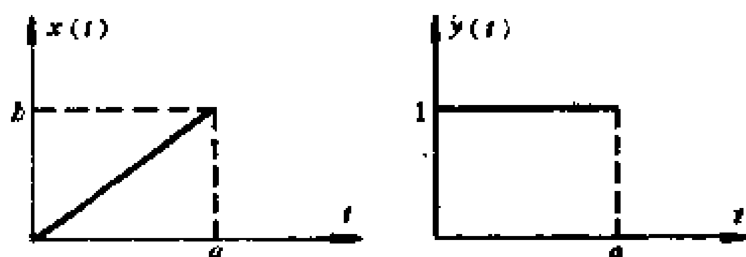
例题 3-8 若有两个信号分别为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}t & (0\leqslant t\leqslant a),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}1 & (0\leqslant t\leqslant a),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

求互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$。

解：如果取所考虑的时间历程的长度为 $T(T>2a)$，再设 t 在 0 到 T 内为均匀分布，即 $p(t)=\frac{1}{T}$，则



例题图 3-8-1

$$\phi_{xy}(\tau)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)y(t+\tau)\frac{1}{T}dt, \tag{1}$$

考虑到仅当

$$0\leqslant t\leqslant a \tag{2}$$

且

$$0\leqslant t+\tau\leqslant a \tag{3}$$

时，(1)式被积函数才有非零值。由(2)、(3)式得

$$-a\leqslant\tau\leqslant a, \tag{4}$$

联立解不等式(2)、(3)、(4)式，确定(1)式的积分域分为以下两种情况：

当 $0\leqslant\tau\leqslant a$ 时，积分域为 $0-(a-\tau)$，

当 $-a\leqslant\tau\leqslant 0$ 时，积分域为 $-\tau-a$；

所以得

$$\phi_{xy}(\tau)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau)\frac{1}{T}dt$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{a-\tau}\frac{b}{a}t\cdot 1\cdot\frac{1}{T}dt=\frac{b}{2aT}(a-\tau)^2 & (0\leqslant\tau\leqslant a),\\ \displaystyle\int_{-\tau}^{a}\frac{b}{a}t\cdot 1\cdot\frac{1}{T}dt=\frac{b}{2aT}(a^2-\tau^2) & (-a\leqslant\tau\leqslant 0).\end{cases}$$

因为 $x(t)$，$y(t)$ 仅在有限区域内有非零值，故所考虑的区间 T 越大，互相关函数值越小。

例题 3-9 已知两个平稳随机过程 $x[t]$ 和 $y[t]$，具有联合概率密度函数

$$p[x(t)y(t+\tau)]$$

$$=\frac{1}{2\pi ab\sqrt{1-c^2}}\exp\left[\frac{-1}{2(1-c^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{2cxy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right],$$

试以过程 $x[t]$，$y[t]$ 的自相关和互相关函数表示 a，b，c 的值。

解： 方法 1

$$\because\qquad \int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dxdy=1,\tag{1}$$

$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy,\tag{2}$$

$$p(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx,\tag{3}$$

$$\therefore\quad p(x)=\frac{1}{2\pi ab\sqrt{1-c^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-1}{2(1-c^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{2cxy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]dy.\tag{4}$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left[\frac{B^2 - AC}{A}\right], \tag{5}$$

把 (4)式中的几项改写成

$$A = \frac{1}{2(1-c^2)b^2}, \quad B = \frac{cx}{2(1-c^2)ab}.$$

$$C = \frac{x^2}{2(1-c^2)a^2}.$$

$$\therefore \quad p(x) = \frac{1}{2\pi ab\sqrt{1-c^2}} \sqrt{\pi \cdot 2(1-c^2)b^2} \exp\left[-\frac{x^2}{\quad}\right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right]. \tag{6}$$

同理，

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dx$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2b^2}\right]. \tag{7}$$

由(6)、(7)式可见，随机变量 X, Y 都服从正态分布。由正态分布性质知，

$$E[x] = 0, \tag{8}$$

$$E[x^2] = \sigma_x^2 = a^2, \tag{9}$$

$$E[y] = 0, \tag{10}$$

$$E[y^2] = \sigma_y^2 = b^2, \tag{11}$$

$$\therefore \quad a = \sqrt{\phi_{xx}(0)}, \quad b = \sqrt{\phi_{yy}(0)}, \tag{12}$$

又

$$\phi_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)p(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int x \cdot y \frac{1}{2\pi ab\sqrt{1-c^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-c^2)}\left(\frac{x^2}{a^2} - \right.\right.$$

$$-\frac{2cxy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\Big)\Big]dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi ab\sqrt{1-c^2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int x\cdot y\cdot e^{\frac{-1}{2(1-c^2)}\left(\frac{x}{a}-c\frac{y}{b}\right)^2-\frac{y^2}{2b^2}}\,dxdy.$$

令 $$z=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\left(\frac{x}{a}-c\frac{y}{b}\right),\quad t=\frac{y}{b},$$

则

$$\phi_{xy}(\tau)=\frac{1}{2\pi ab\sqrt{1-c^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2b^2}}dy\int_{-\infty}^{\infty}xye^{\frac{-1}{2(1-c^2)}\left(\frac{x}{a}-c\frac{y}{b}\right)^2}dx$$

$$=\frac{ab}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{1-c^2}\,zt+ct^2\right)e^{-\frac{t^2}{2}-\frac{z^2}{2}}dzdt$$

$$=\frac{ab\sqrt{1-c^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+$$

$$+\frac{abc}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{abc}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{abc}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}=abc,\tag{13}$$

$$\therefore\qquad c=\frac{\phi_{xy}(\tau)}{ab}=\frac{\phi_{xy}(\tau)}{\sqrt{\phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0)}}.$$

方法 2

仔细分析题意所给的概率密度函数，可知 $x(t)$ 与 $y(t+\tau)$ 服从二维正态分布，与标准式

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\right.\right.$$

$$-2\rho_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\Big]\Big\}$$

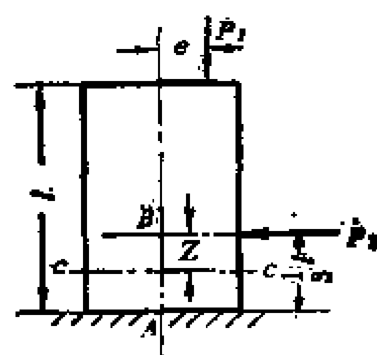
相比较，得

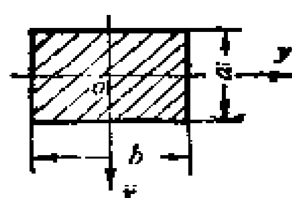
$$m_x=0,\ m_y=0.$$

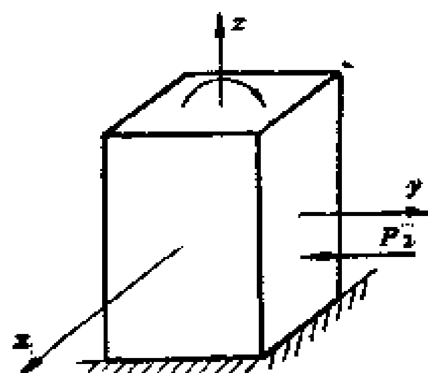
$$a=\sigma_x=\sqrt{\phi_{xx}(0)},\ b=\sigma_y=\sqrt{\phi_{yy}(0)},$$

$$c=\rho_{xy}=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}[\phi_{xy}(\tau)-m_xm_y]=\frac{\phi_{xy}(\tau)}{\sqrt{\phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0)}}.$$

例题 3-10 图示截面为 $a\times b$ 的立柱，下端面固定，受偏心距为 e 的随机集中力 P_1 作用，又受水平随机力 P_2 作用，且 P_1、P_2 均在 yoz 平面内。已知概率特征 $m_{P_1}, m_{P_2}, D_{P_1}, D_{P_2}$ 及 $\phi_{P_1P_2}(\tau)$，求立柱 AB 段截面 $C—C$ 上最大压应力的平均值和方差。







例题图 3-10-1

解：首先将 P_1，P_2 看作确定的量，则任一截面 $C—C$ 上由于 P_1 引起的应力为

$$\sigma_{P_1}=-\frac{P_1}{ab}-\frac{12P_1e}{ab^3}y,$$

在 $C—C$ 截面上由于 P_2 引起的应力

$$\sigma_{P_2}=\frac{12P_2z}{ab^3}y,$$

在小变形的情况下，应力可以叠加

$$\sigma=\sigma_{P_1}+\sigma_{P_2}$$

$$=-\frac{P_1}{ab}-\frac{12P_1e}{ab^3}y-\frac{12P_2z}{ab^3}y.$$

若 $P_1e>P_2z$，则有最大压应力

$$|\sigma_{压}|_{max}=\frac{P_1}{ab}+\frac{12(P_1e-P_2z)}{ab^3}y_{max}$$

$$=\frac{P_1}{ab}+\frac{6(P_1e-P_2z)}{ab^2}$$

$$=\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)P_1-\frac{6\,z}{ab^2}P_2.$$

当 P_1，P_2 是随机变量时，上面 $|\sigma_{压}|_{max}$ 的算式是两个随机变量 P_1 和 P_2 的函数。所以 $|\sigma_{压}|_{max}$ 也是随机变量。计算它的均值需要用到随机变量代数运算的加法定理：

$$m_{\sigma_{压max}}=E[|\sigma_{压}|_{max}]=\frac{m_{P_1}}{ab}+\frac{6(em_{P_1}-zm_{P_2})}{ab^2}$$

$$=\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)m_{P_1}-\frac{6\,z}{ab^2}m_{P_2},$$

$$E[\sigma^2_{\sigma_{压max}}]=E\left[\left\{\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)P_1-\frac{6\,z}{ab^2}P_2\right\}^2\right]$$

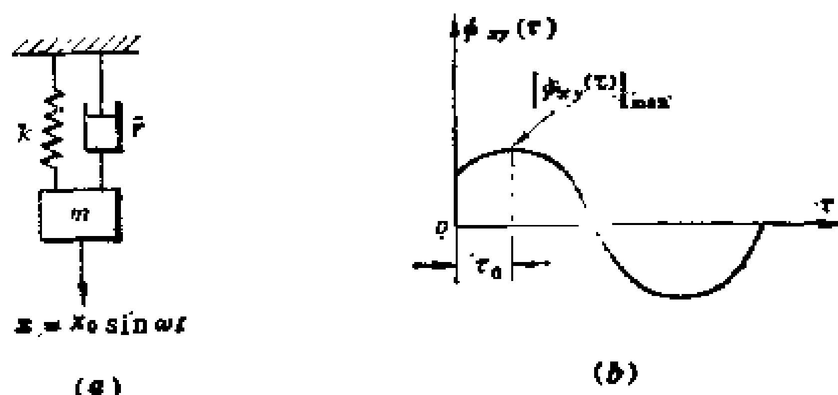
$$=\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)^2E[P_1^2]+\left(\frac{6\,z}{ab^2}\right)^2E[P_2^2]-$$

$$-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)\frac{6\,z}{ab^2}E[P_1\cdot P_2]$$

$$=\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)^2(D_{P_1}+m^2_{P_1})+\left(\frac{6\,z}{ab^2}\right)^2(D_{P_2}+m^2_{P_2})-$$

$$-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{6\,e}{ab^2}\right)\frac{6\,z}{ab^2}\phi_{P_1P_2}(\tau)|_{\tau=0}.$$

例题 3-11 试用互相关函数最大值的滞后时间求减振器的阻尼系数。



例题图 3-11-1

解：例题图 3-11-1(a) 所示为减振器模型，以力激励信号 $x=x_0\sin\omega t$ 作用在质量块上，测量质量的位移或加速度响应信号 $y=y_0\sin(\omega t-\varphi)$，这两个信号的互相关函数为

$$\phi_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t+\tau)]$$

$$=\frac{1}{2}x_0y_0\cos(\omega\tau-\varphi), \tag{1}$$

用曲线表示(1)式如图 3-11-1(b)，从此图上可见，当 $\phi_{xy}(\tau)$ 在最大值时，时延值为 τ_0。又从 (1) 式中知 $\phi_{xy}(\tau)$ 为最大值时有 $\cos(\omega\tau_0-\varphi)=1$，

即

$$\omega\tau_0-\varphi=0,$$

$$\therefore \qquad \varphi=\omega\tau_0. \tag{2}$$

又因为相位角 φ 与系统的阻尼有关，即

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \tag{3}$$

式中 ζ 为无量纲阻尼因子，它等于 $r/2m\omega_0$，ω_0 为无阻尼时系统的固有频率，它等于 $\sqrt{k/m}$。将(2)代入(3)式，得粘性阻尼系数计算公式

$$r=\frac{k}{\omega}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]\operatorname{tg}\omega\tau_0. \tag{4}$$

由此式可知，只要已知系统的特征参数 k，m，图 3-11-1(b)上的滞后时间 τ_0 以及激励的圆频率 ω，从(4)式可以算出粘性阻尼系数。

第三章习题

习题 3-1 观察不同输出功率的发信机的寿命(MTBF)，所得结果如下表第 2 列所示。寿命在平均值的周围呈现对数正态分布。发信机的复杂程度与输出功率的对数成比例，且与寿命的对数值成比例。试导出输出功率与 MTBF 的关系式，并计算不同输出功率的发信机的MTBF。

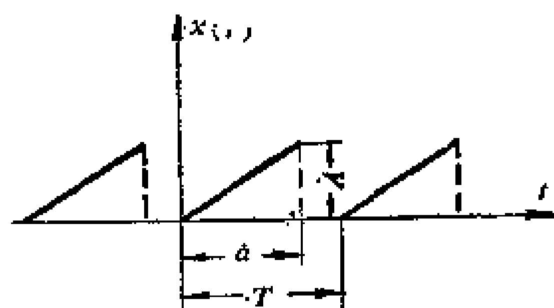
发信机的输出功率 P	观察的寿命（MTBF）	计算公式推测的寿命
100 毫瓦	6440 小时	6684 小时
1 瓦	5060	4853
3	3560	4166
10	4000	3524
30	3000	3025
100	3100	2559
250	2180	2253
500	1780	2046

答案：$\mathrm{MTBF}=4853\times(P/\text{瓦})^{-0.139}$（小时），**由此式算出之寿命见上表第 3 列。**

习题 3-2 设两相关随机变量的某样本函数均值分别为 $m_x=1$ 和 $m_y=2$，若此两子样的相关系数 $\rho_{xy}=0.5$，如果 y 关于 x 的回归直线为 $y=1+x$，求 x 关于 y 的回归直线公式和斜率。

答案：$y=4x-2$，斜率 $k=4$。

习题 3-3 设平稳随机过程 $X[t]$ 的每一个样本函数，都由无限多周期性的三角形脉冲所组成，如习题图 3-3 所示。图中 a 为一个脉冲的持续时间，假设周期 T 不小于 $2a$。各样本的区别仅在于相位不同，而相位是在时段 $(0,T)$ 内均匀分布的随机变量。求此过程的自相关函数。



习题图 3-3

答案：$\phi_{xx}(\tau)$ 是周期为 T 的函数，它在 $[0,T]$ 内的表达式为

$$\phi_{xx}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{A^2}{6a^2T}(a-\tau)^2(2a+\tau) & (0\leqslant\tau\leqslant a),\\ 0 & (a\leqslant\tau\leqslant T-a),\\ \dfrac{A^2}{6a^2T}[a^2-(T-\tau)^2](2a-5T+5\tau) & (T-a)\leqslant\tau\leqslant T.\end{cases}$$

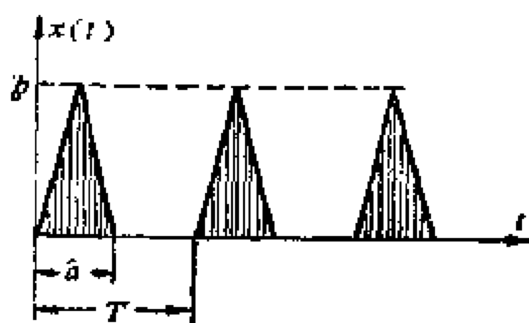
习题 3-4　求正弦波 $x(t)=x_0\sin t$的自相关函数并图示。

答案： $\phi_{xx}(\tau)=\dfrac{x_0^2}{2}\cos\tau$。

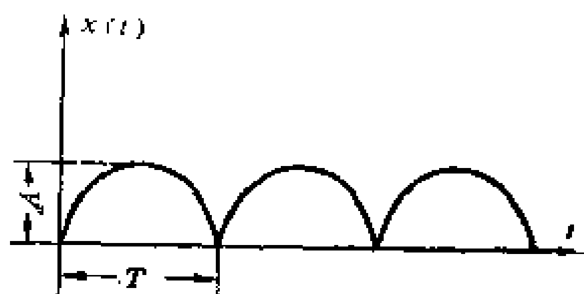
习题 3-5　设断续激励是用锤子敲击在振动系统上造成的，假设此激励的过程是平稳的，记作 $X[t]$，其中每一样本都由无限多周期性三角形脉冲所组成，图上 a 表示脉冲的持续时间，若周期 $T=2a$，求此激励 $X[t]$ 的自相关函数。

答案： $\phi_{xx}(\tau)$是以T为周期的函数，

$$\phi_{xx}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{b^2}{a^3}\left(-\dfrac{a^3}{b}-a\tau^2+\tau^3\right) & \left(0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{a}{2}\right),\\ \dfrac{b^2}{3a^3}(a-\tau)^3 & \left(\dfrac{a}{2}<\tau\leqslant a\right),\\ \dfrac{b^2}{a^3}\left(-\dfrac{a^3}{3}+a^2\tau-a\tau^2+\dfrac{\tau^3}{3}\right) & \left(a\leqslant\tau\leqslant\dfrac{3a}{2}\right),\\ \dfrac{b^2}{a^3}\left(\dfrac{25}{6}a^3+8a^2\tau+5a\tau^2-\tau^3\right) & \left(\dfrac{3a}{2}\leqslant\tau\leqslant 2a\right).\end{cases}$$



习题图 3-5



习题图 3-6

习题 3-6　经过整流后的正弦波 $x(t)=A|\sin(\omega t+\varphi)|$，其中 A，ω为常数，而 t 是在 0 到 T 区间内均匀分布的随机变量，求此随机过程的自相关函数。

答案：

$$\phi_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}\left[\frac{2}{\pi}\sin\omega\tau+\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)\cos\omega\tau\right]$$

习题 3-7 一样本函数的时间历程可以用付里叶级数展开式表示为

$$x(t)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi n}{T}(\varphi-t),$$

式中 φ 为在[0,T]内均匀分布的随机变量，即

$$p(\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{T}(0\leqslant\varphi\leqslant T),\\ 0\ (\text{其它}).\end{cases}$$

试由计算集合平均 $E[x(t)x(t+\tau)]$来求随机过程 $x[t]$的自相关函数。

答案：

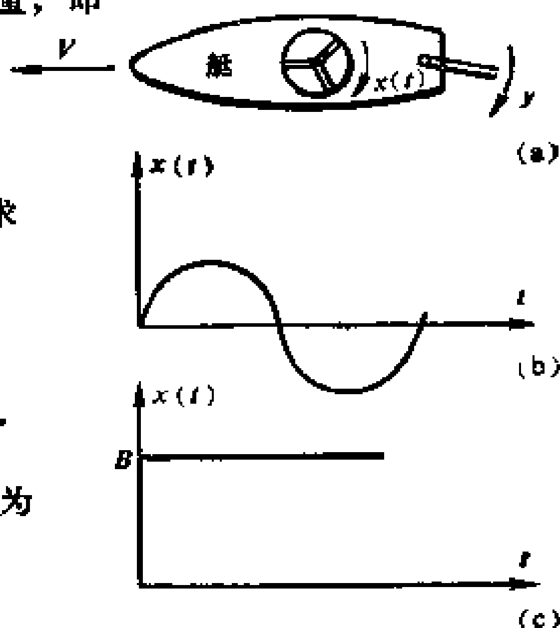
$$\phi_{xx}(\tau)=\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{8a^2}{\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n\tau}{T}.$$

习题 3-8 某随机过程的样本函数为

$$x(t)=\begin{cases}0 & (t<0),\\ e^{-\beta t} & (t\geqslant 0).\end{cases}$$

试检验此过程是否是平稳的。

答案：此过程是非平稳的，因为其均值和自相关函数均与 t 有关。



习题图 3-9

习题 3-9 某快艇的方向舵操纵系统如习题图 3-9(a) 所示，它可以简化为最简单的单自由度系统，m，r，k 分别为等效质量、等效阻尼和等效刚度。若输入 $x(t)=A\sin\omega t$，求输出 $y(t)$ 的滞后时间与系统的等效阻尼系数 r 之间的关系；若输入 $x(t)$为一阶跃函数，即

$$x(t)=\begin{cases}B & t\geqslant 0,\\ 0 & t=0.\end{cases}$$

求输出 $y(t)$的滞后时间。

答案：若输入为正弦函数，则滞后时间

$$\tau_s=\frac{1}{\omega}\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega^3}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2+4\zeta^2\omega^2)}\right],$$

式中，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\zeta=\frac{r}{2\sqrt{km}}$。

若输入为阶跃函数，且 $\zeta<1$，则

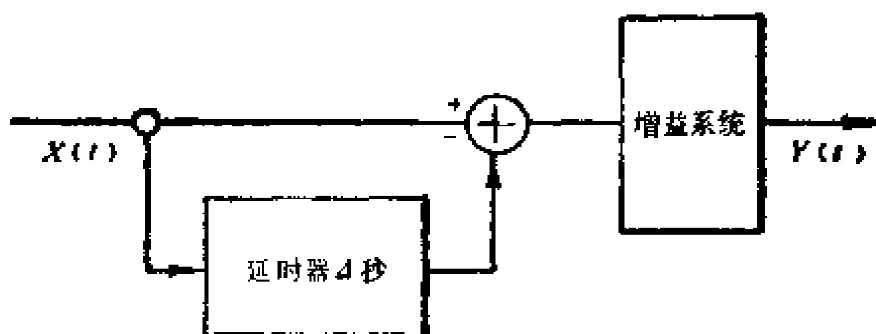
$$\tau_0=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$

习题 3-10 若$X[t]$和$Y[t]$是联合平稳随机过程，证明以下性质：

(1) $\phi_{yx}(\tau)=\phi_{xy}(-\tau)$,

(2) $|\phi_{xy}(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}[\phi_{xx}(0)+\phi_{yy}(0)]$,

(3) $|\phi_{xy}(\tau)|^2\leqslant\phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0)$。



习题图 3-11

习题 3-11 习题图 3-11 所示系统，增益因子为 $1/\Delta$，输入 $X(t)$ 是均值为零的广义平稳随机过程的一个样本函数。试求下列几个信息函数：

(a) $\phi_{xy}(t_1,t_2)$;

(b) $\phi_{yy}(t_1,t_2)$;

(c) $Y(t)$是弱平稳随机过程吗？$X[t]$和$Y[t]$是联合弱平稳过程吗？

(d) 证明 $\lim\limits_{\Delta\to 0}[\phi_{yy}(\tau)]=-\frac{d^2\phi_{xx}(\tau)}{d\tau^2}$;

(e) 计算上述极限在 $\phi_{xx}(\tau)=P\cos\tau$ 特殊情况下的值。

提示：$Y(t)=\frac{1}{\Delta}\{X(t)-X(t-\Delta)\}$

答案：(a) $\phi_{xy}(t_1,t_2)=\frac{1}{\Delta}[\phi_{xx}(\tau)-\phi_{xx}(\tau-\Delta)]$，其中 $\tau=t_2-t_1$。

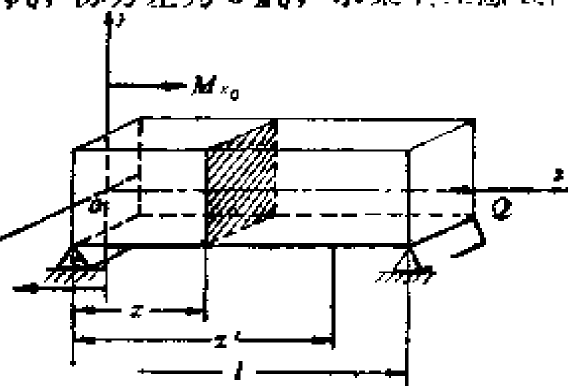
(b) $\phi_{yy}(t_1,t_2)=\frac{1}{\Delta^2}[2\phi_{xx}(\tau)-\phi_{xx}(\tau+\Delta)-\phi_{xx}(\tau-\Delta)]$,

其中 $\tau=t_2-t_1$。

(c) $Y(t)$是弱平稳的，$X(t)$和$Y(t)$是联合弱平稳的。

(e) $\lim\limits_{\Delta\to 0}[\phi_{yy}(\tau)]=P\cos\tau$.

习题 3-12 习题图3-12所示的梁受随机载荷，已知力矩 M_{x_0} 和纵向力 Q 的均值为 m_M, m_Q，均方值为 ψ_M^2, ψ_Q^2，协方差为 C_{MQ}，求梁上任意截面处最大正应力的平均值和均方值以及任意两截面间最大正应力的互相关函数。



习题图 3-12

答案： $m_\sigma = \dfrac{\left(1-\dfrac{z}{l}\right)}{W} m_M + \dfrac{m_Q}{F}$，

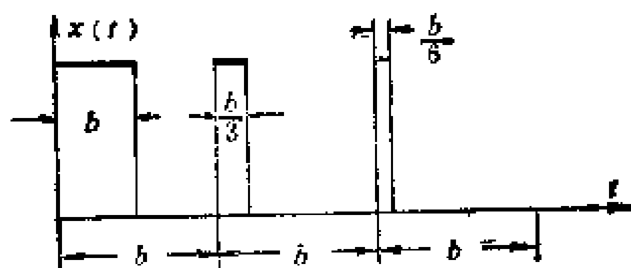
$$\psi_\sigma^2 = \frac{\left(1-\dfrac{z}{l}\right)^2}{W^2}\psi_M^2 + \frac{2\left(1-\dfrac{z}{l}\right)}{WF}(C_{MQ}+m_M m_Q) + \frac{1}{F^2}\varphi_Q^2 .$$

$$\phi_{\sigma\sigma}(z,z') = \frac{\left(1-\dfrac{z}{l}\right)\left(1-\dfrac{z'}{l}\right)}{W^2}\psi_M^2 +$$

$$+\frac{\left[\left(1-\dfrac{z}{l}\right)\left(1-\dfrac{z'}{l}\right)\right]}{WF}(C_{MQ}+m_M m_Q) + \frac{1}{F^2}D_Q ,$$

式中，F 为梁的截面积，W 为截面抗弯系数。

习题 3-13 计算习题图3-13所示的宽度调制脉冲的自相关函数，并作出它的图形。



习题图 3-13

答案： 取一些正 τ 值列表如下：

τ 值	b	$\frac{7}{6}b$	$\frac{4}{3}b$	$\frac{3}{2}b$	$\frac{5}{3}b$	$\frac{11}{6}b$	$2b$	$\geqslant\frac{13}{6}b$
$\phi_{xx}(\tau)$	$\frac{1}{6}A^2$	$\frac{1}{18}A^2$	0	0	$\frac{1}{18}A^2$	$\frac{1}{18}A^2$	$\frac{1}{18}A^2$	0

习题 3-14 已知平稳随机过程 x[t]的自相关函数为

$$\phi_{xx}(\tau)=A\cos\tau \qquad (-\infty<\tau<\infty),$$

证明 $x(t)$是无限可微的，且存在$\phi_{xx}(\tau)=\phi_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)=\phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)=\cdots$。

参 考 文 献

[1] J. S. 贝达特，A. G. 皮尔索，随机数据分析方法，国防工业出版社，1976。

[2] Б. А. Светлицкий, Случайные Колебания Механических Систем, Издательство Машиностроение, 1976。

[3] W. T. 汤姆逊，振动理论及其应用，煤炭工业出版社，1980。

第四章 频率分析与谱密度

振动的时间历程反映了振动过程随时间变化的情况，它是在时间域的描述。对于简单的振动（例如简谐振动），这种描述方法也同时给出了振动的频率。但是对于复杂振动，特别是对随机振动，时间域的描述往往不易全面地、深刻地反映振动的特点。例如不易看出振动含有哪些频率成分，何种频率成分占优势，各种频率的振动能量分别是多少。这就需要将振动的时间历程（或其相关函数）通过付里叶级数（对于周期函数）或付里叶积分（对于非周期函数）变换为在频率域描述的函数，或者说把振动波形在频率域上进行分解，这一过程称为**频率分析**。这样得到的频域函数，其中有的可称为功率谱密度函数，或简称为“谱密度”。

在物理现象中，谱的概念总是和频率联系在一起的。光谱给出了各种单色光在频率域的分布，声谱给出了各种声波在频率域的分解，而功率谱则给出了振动能量在频率域上的分布。因而通过对功率谱的研究，有助于理解振动的物理机理，从而有助于进行振动摸拟，以解决工程设计中的一些振动问题。谱密度分析比相关函数分析给出更多的随机振动信息，因而也应用得更广。

一、内容提要

1. 自功率谱密度函数

由自相关函数的付里叶变换得到：

$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \qquad (4\text{-}1)$$

或

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau. \qquad (4\text{-}2)$$

对各态历经过程也可由单个样本函数$x(t)$乘上截断函数进行付里叶变换来计算，即

$$S_{xx}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}A(f)\cdot A^*(f), \qquad (4\text{-}3)$$

式中

$$A(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt,$$

$$x_T(t)=x(t)u(t).$$

这里$u(t)$为截断函数。(4-3) 式中的$A^*(f)$表示$A(f)$的共轭。

对于单边自功率谱，有

$$W_{xx}(f)=2S_{xx}(f)\quad(0\leqslant f\leqslant\infty). \qquad (4\text{-}4)$$

自功率谱密度函数 $S_{xx}(\omega)$的主要性质有：

(1) 谱密度曲线下的面积等于响应的均方值，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)d\omega=\phi_{xx}(0)=E[x^2]. \qquad (4\text{-}5)$$

(2) $S_{xx}(\omega)$是ω的实偶函数。

2. 互谱密度函数

由互相关函数的付里叶变换得到：

$$S_{xy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau; \qquad (4\text{-}6)$$

或

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xy}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau. \qquad (4\text{-}7)$$

互谱密度函数 $S_{xy}(\omega)$的主要性质有：

(1) 互谱是复函数。

(2) $S_{yx}(\omega)$和 $S_{xy}(\omega)$组成复共轭对：

$$\begin{cases}S_{xy}(\omega)=S^*_{xy}(\omega);\\ S_{yx}(\omega)=S^*_{xy}(\omega).\end{cases} \qquad (4\text{-}8)$$

(3) 互谱模的平方不大于对应的自谱的乘积，即

$$|S_{xy}(\omega)|^2\leqslant S_{xx}(\omega)\cdot S_{yy}(\omega). \qquad (4\text{-}9)$$

二、例　　题

例题 4-1　求信号 $x_1(t)=1$ 及$x_2(t)=e^{i2\pi f_0t}$的幅频谱，自

相关函数和自功率谱密度函数。

解：(1) $x_k(t)=1$ 的幅频谱：

从逆付里叶变换知

$$x_k(t)=1=\int_{-\infty}^{\infty}X_k(f)e^{i2\pi ft}df, \tag{1}$$

上式的付里叶变换

$$X_k(f)=\delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi ft}dt. \tag{2}$$

式中的 δ 函数有如下性质：

$$\delta(f)=\begin{cases}0 & (f\neq 0),\\ \infty & (f=0).\end{cases} \tag{3-a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(f)df=1\ (\text{对任意}\varepsilon>0). \tag{3-b}$$

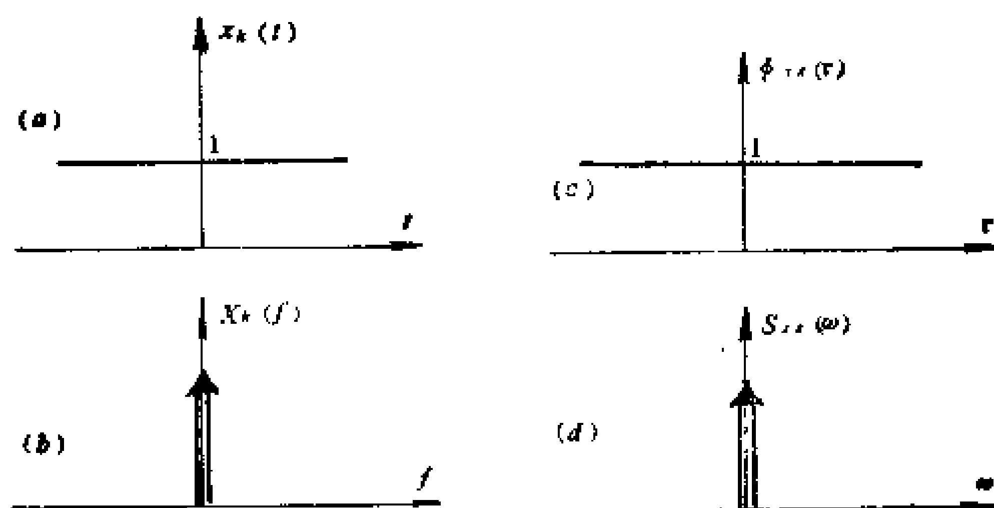
(2) $x_k(t)=1$ 的自相关函数：

常数的自相关函数为其本身的平方，即有

$$\phi_{xx}(\tau)=1. \tag{4}$$

(3) $x_k(t)=1$ 的自功率谱密度函数

$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\delta(\omega); \tag{5}$$



例题图 4-1-1

或

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau=\delta(f).$$

可见，对于常数来说，其幅频谱和自功率谱曲线形式相同，但单位不同。

(4) $x_k(t)=e^{i2\pi f_0 t}$的幅频谱：

从逆付里叶变换

$$e^{i2\pi f_0 t}=\int_{-\infty}^{\infty}X_k(f)e^{i2\pi ft}df, \tag{6}$$

上式左右两边乘以$e^{-i2\pi f_0 t}$，得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}X_k(f)e^{i2\pi(f-f_0)t}df=\int_{-\infty}^{\infty}X_k(f_1+f_0)e^{i2\pi f_1 t}df_1,$$

式中 $f_1=f-f_0$，所以有

$$X_k(f_1+f_0)=\delta(f_1), \tag{7}$$

或

$$X_k(f)=\delta(f-f_0).$$

(5) $x_k(t)=e^{i2\pi f_0 t}$ 的自相关函数

∵ $x_k(t)=\cos 2\pi f_0 t+i\sin 2\pi f_0 t$,

对于复随机变量，有

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=E[x_k(t)x_k^*(t+\tau)]\\&=E[\{\cos 2\pi f_0 t+i\sin 2\pi f_0 t\}\{\cos 2\pi f_0(t+\tau)-\\&\quad -i\sin 2\pi f_0(t+\tau)\}]\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\{\cos 2\pi f_0 t+i\sin 2\pi f_0 t\}\{\cos 2\pi f_0(t+\tau)-\\&\quad -i\sin 2\pi f_0(t+\tau)\}dt\\&=f_0(I_1+I_2+I_3+I_4),\end{aligned} \tag{8}$$

式中，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{1}{f_0}}\cos 2\pi f_0 t\cdot\cos 2\pi f_0(t+\tau)dt\\&=\int_0^{\frac{1}{f_0}}\cos 2\pi f_0 t[\cos 2\pi f_0 t\cos 2\pi f_0\tau-\sin 2\pi f_0 t\cdot\end{aligned}$$

$\sin 2\pi f_0\tau]dt,$

应用三角函数的正交性，上式方括号中第二项积分为零，所以有

$$I_1=\frac{1}{2f_0}\cos 2\pi f_0\tau; \tag{9}$$

类似地有

$$I_2=i\int_0^{\frac{1}{f_0}}\sin 2\pi f_0 t\cdot\cos 2\pi f_0(t+\tau)dt$$

$$=\frac{-i}{2f_0}\sin 2\pi f_0\tau;$$

$$I_3=-i\int_0^{\frac{1}{f_0}}\cos 2\pi f_0 t\cdot\sin 2\pi f_0(t+\tau)dt$$

$$=\frac{-i}{2f_0}\sin 2\pi f_0\tau;$$

$$I_4=\int_0^{\frac{1}{f_0}}\sin 2\pi f_0 t\cdot\sin 2\pi f_0(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{2f_0}\cos 2\pi f_0\tau.$$

$$\therefore \phi_{xx}(\tau)=f_0(I_1+I_2+I_3+I_4)$$

$$=(\cos 2\pi f_0\tau-i\sin 2\pi f_0\tau)=e^{-i2\pi f_0\tau}. \tag{10}$$

(6) $x_k(t)=e^{i2\pi f_0 t}$的自功率谱密度函数

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi(f_0+f)\tau}d\tau=\delta(f_0+f). \tag{11}$$

讨论：由本题的结果，可得出如下推论：

(1) 当信号是余弦函数

$$x_c(t)=\cos 2\pi f_0 t=\frac{1}{2}(e^{i2\pi f_0 t}+e^{-i2\pi f_0 t})$$

时，其付里叶变换

$$X_c(f)=\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)].$$

(2) 当信号是正弦函数

$$X_s(t)=\sin 2\pi f_0 t=\frac{1}{2i}(e^{i2\pi f_0 t}-e^{-i2\pi f_0 t})$$

时，其付里叶变换

$$X_s(f)=\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)].$$

例题 4-2 若例题 3-7 所给随机过程 $x[t]$ 的每一个元的时间原点(即 $t=0$)，可在时段 Δe 中随机选择，且具有均匀分布的概率密度函数，那么过程是否平稳？并求其自相关函数和自功率谱密度函数。

解：为方便起见，取 $n=0$，则时间原点在 $0<t<\Delta e$ 内均匀分布，其概率密度函数如下：

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta e} & (0<t<\Delta e),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases} \tag{1}$$

$n\neq 0$ 时的讨论与此类似。

由于任一时刻 t 都将在 Δe 内均匀出现，因而过程必然是平稳的。通过简单的时间平均即可求得过程的自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$，它只依赖时间差 τ 而与时间 t 无关。

$$\phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}E[x(t)x(t+\tau)]p(t)dt, \tag{2}$$

式中，$p(t)$值如(1) 式如示，而 $E[x(t)x(t+\tau)]$为：

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\begin{cases}A^2 & (0<t+\tau<\Delta e,\quad 0<t<\Delta e),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases} \tag{3}$$

由(1)、(3)式可见，仅当 $0<t<\Delta e$，$0<t+\tau<\Delta e$ (即 $-\tau<t<-\tau+\Delta e$)时，$E[x(t)x(t+\tau)]p(t)$才不为零。于是，τ 取不同值时的自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$如下：

$$\phi_{xx}(\tau)=\begin{cases}0 & (\tau<-\Delta e), \\ \int_{-\tau}^{\Delta e} A^2\frac{1}{\Delta e}dt=\left(1+\frac{\tau}{\Delta e}\right)A^2 & (-\Delta e<\tau<0), \\ \int_{0}^{-\tau+\Delta e} A^2\frac{1}{\Delta e}dt=\left(1-\frac{\tau}{\Delta e}\right)A^2 & (0<\tau<\Delta e), \\ 0 & (\tau>\Delta e).\end{cases}$$

$\phi_{xx}(\tau)$对 τ 曲线如例题图 4-2-1 所示。

自功率谱密度函数为：

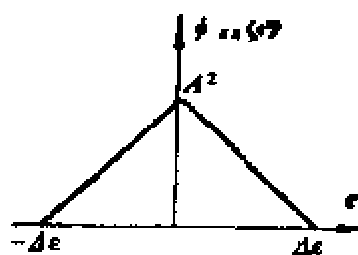
$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\Delta e}^{0}\left(1+\frac{\tau}{\Delta e}\right)A^2\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\Delta e}\left(1-\frac{\tau}{\Delta e}\right)A^2\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}$$

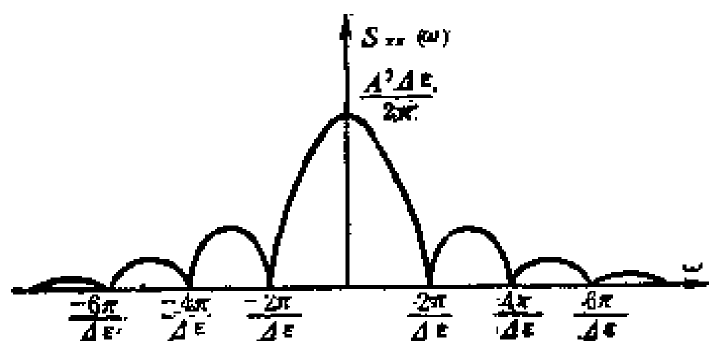
$$=\frac{A^2}{\pi\omega^2\Delta e}(1-\cos\omega\Delta e)$$

$$=\frac{A^2\Delta e}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta e}{2}}{\omega\Delta e/2}\right)^2. \tag{5}$$



例题图 4-2-1

$S_{xx}(\omega)$与 ω 的曲线表示在例题图 4-2-2 上。



例题图 4-2-2

例题 4-3 已知平稳随机过程 $x[t]$ 的自功率谱密度函数为 $S_{xx}(\omega)=S_0e^{-c|\omega|}$，式中 c，S_0 均为常数，且 $c>0$，求自相关函

数 $\phi_{xx}(\tau)$。

解：

$$\phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_0e^{-c|\omega|}e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=S_0\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(c+i\tau)\omega}d\omega+\int_{0}^{\infty}e^{(-c+i\tau)\omega}d\omega\right]$$

$$=S_0\left(\frac{1}{c+i\tau}+\frac{1}{c-i\tau}\right)=\frac{2cS_0}{c^2+\tau^2}.$$

例题 4-4 设某平稳随机过程 $x[t]$的均值为零，方差为 σ_x^2，自相关函数表示为

$$\phi_{xx}(\tau)=\sigma_x^2e^{-(\omega_1\tau)^2}\cos\omega_2\tau,$$

其中 ω_1，ω_2 为常数，试确定其功率谱 $S_{xx}(\omega)$。

解：

$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\omega_1\tau)^2}\cos\omega_2\tau e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\omega_1\tau)^2}\cos\omega_2\tau\cos\omega\tau d\tau+0,$$

上式右边等于零的项是由于奇函数$(-i\sin\omega\tau)$的积分为零。

$$\therefore\quad S_{xx}(\omega)=\frac{\sigma_x^2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\omega_1\tau)^2}\times$$

$$\times\frac{1}{2}[\cos(\omega_2-\omega)\tau+\cos(\omega_2+\omega)\tau]d\tau$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{2\pi}\left[\text{Re}\left\{\int_0^{\infty}e^{-\omega_1^2\tau^2+i(\omega_2-\omega)\tau}d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{\infty}e^{-\omega_1^2\tau^2+i(\omega_2+\omega)\tau}d\tau\right\}\right],$$

$$\because\quad -\omega_1^2\tau^2+i(\omega_2-\omega)\tau=-\omega_1^2\left(\tau+i\frac{\omega-\omega_2}{2\omega_1^2}\right)^2-\frac{(\omega-\omega_2)^2}{4\omega_1^2};$$

$$-\omega_1^2\tau^2+i(\omega_2+\omega)\tau=-\omega_1^2\left(\tau-i\frac{\omega+\omega_2}{2\omega_1^2}\right)^2-\frac{(\omega+\omega_2)^2}{4\omega_1^2},$$

令 $x=\tau+i\dfrac{\omega-\omega_2}{2\omega_1^2}$,

$$\therefore\quad \int_0^\infty e^{-\omega_1^2\tau^2+i(\omega_2-\omega)\tau}d\tau=e^{-\frac{(\omega-\omega_2)^2}{4\omega_1^2}}\int_0^\infty e^{-\omega_1^2x^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_1}e^{-\frac{(\omega-\omega_2)^2}{4\omega_1^2}};$$

类似有：

$$\int_0^\infty e^{-\omega_1^2\tau^2+i(\omega_2+\omega)\tau}d\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_1}e^{-\frac{(\omega+\omega_2)^2}{4\omega_1^2}},$$

$$\therefore\quad S_{xx}(\omega)=\frac{\sigma_x^2}{4\omega_1\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega+\omega_2}{\omega_1}\right)^2}+e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega-\omega_2}{\omega_1}\right)^2}\right].$$

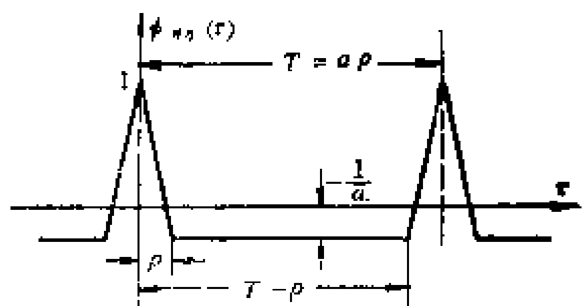
例题 4-5 已知伪随机二进制序列的自相关函数为

$$\phi_{\eta\eta}(\tau)=1-\frac{1+a}{a\rho}\tau\qquad(0\leqslant\tau\leqslant\rho),\tag{1}$$

$$\phi_{\eta\eta}(\tau)=-\frac{1}{a}\qquad\rho\leqslant\tau\leqslant(T-\rho),\tag{2}$$

$$\phi_{\eta\eta}(\tau)=-a-\frac{1+a}{a\rho}\tau\quad(T-\rho)\leqslant\tau\leqslant T.\tag{3}$$

式中ρ为信号发生器时钟周期，T为序列重复周期($T=a\rho$，其中$a=2^n-1$，n为移位寄存器级数)。求信号的自功率谱密度函数。



例题图 4-5-1

解：应用维纳-辛钦公式可求得$S_{\eta\eta}(\omega)$。即

$$S_{\eta\eta}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\phi_{\eta\eta}(\tau)e^{-ik\omega\tau}d\tau,$$

上式中，e 的指数比一般公式多了个 k，$k=0$，±1，±2，$\cdots$，前面多了个求和记号，因而其实际意义与原公式是一样的。通过这种处理，仅是把连续的谱密度函数 $S_{\eta\eta}(\omega)$ 离散化。

因为 $\phi_{\eta\eta}(\tau)$ 为偶函数，所以上述积分还可以简化：

$$S_{\eta\eta}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\phi_{\eta\eta}(\tau)\cos k\omega\tau d\tau$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\left\{\int_{0}^{\rho}\left(1-\frac{1+a}{a\rho}\tau\right)\cos k\omega\tau d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{\rho}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{1}{a}\right)\cos k\omega\tau d\tau\right\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\left\{\left[\frac{\sin k\omega\tau}{k\omega}-\frac{1+a}{a\rho}\left(\frac{\cos k\omega\tau}{k^2\omega^2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\tau}{k\omega}\sin k\omega\tau\right)\right]_{0}^{\rho}-\frac{1}{a}\left[\frac{\sin k\omega\tau}{k\omega}\right]_{\rho}^{\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\left\{\frac{\sin k\omega\rho}{k\omega}-\frac{1+a}{a\rho}\left(\frac{\cos k\omega\rho}{k^2\omega^2}+\right.\right.$$

$$\left.\frac{\rho}{k\omega}\sin k\omega\rho-\frac{1}{k^2\omega^2}\right)-$$

$$\left.\frac{1}{a}\left[\frac{\sin k\omega\frac{T}{2}-\sin k\omega\rho}{k\omega}\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{a\rho}\left\{-\frac{\sin\omega k\cdot\frac{T}{2}}{ak\omega}-\frac{1+a}{a\rho}\frac{(\cos k\omega\rho-1)}{k^2\omega^2}\right\}$$

$$(\because\quad T=a\rho)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{1}{a}\left[\frac{\sin k\omega\frac{T}{2}}{k\omega\frac{T}{2}}\right]+\frac{1+a}{a^2}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\omega\rho}{2}\right)}{\frac{k\omega\rho}{2}}\right]^2\right\}$$

$$
=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{1}{a}\left[\frac{\sin k\pi}{k\pi}\right]\right\}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1+a}{a^{2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\omega\rho}{2}\right)}{\frac{k\omega}{2}\rho}\right]^{2},
$$

$$
\left(\because\quad T=\frac{2\pi}{\omega}\right)
$$

上式中第一个求和号内各项，当$k\neq0$时为零，唯当$k\to0$时值为$-\frac{1}{a}$。这一项代表直流分量。第二个求和号可以写成级数的形式，所以有：

$$
S_{\eta\eta}(\omega)=-\frac{1}{a}+\frac{1+a}{a^{2}}\cdot\left\{\left[\frac{\sin\frac{k\omega\rho}{2}}{\frac{k\omega\rho}{2}}\right]^{2}\right\}_{k=0}+
$$

$$
+\frac{1+a}{a^{2}}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\omega\rho}{2}\right)}{\frac{k\omega\rho}{2}}\right]^{2},
$$

上式右边的第二项，在$k=0$时值为$\frac{1+a}{a^{2}}$，所以

$$
S_{\eta\eta}(\omega)=\frac{1}{a^{2}}+\frac{1+a}{a^{2}}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\omega\rho}{2}\right)}{\frac{k\omega\rho}{2}}\right]^{2}.
$$

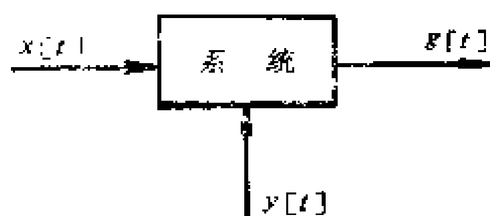
还可以写成与δ函数乘积的形式：

$$
S_{\eta\eta}(\omega_{1})=\frac{1}{a^{2}}\delta(\omega_{1}-0)+\frac{1+a}{a^{2}}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\omega_{1}\rho}{2}\right)}{\frac{k\omega_{1}\rho}{2}}\right]^{2}\delta(\omega_{1}-k\omega),
$$

式中脚标1是供鉴别用的。

讨论：由于一般随机激励信号的低频分量特别难以分解，因

而采用伪随机信号。



例题图 4-6-1

伪随机信号是一种特殊的周期信号，它有类似白噪声的统计特性，在实际应用中常常用来替代白噪声。由于伪随机信号的周期性，且周期可以控制，所以不致因观察时间不足而引起较大误差，测试时间可以大为缩短。

例题 4-6 例题图 4-6-1 所示系统，若 $x[t]$ 和 $y[t]$ 都为统计独立的平稳随机过程，且有 $z[t]=x[t]\cdot y[t]$，若已知 $\phi_{xx}(\tau)$ 及 $\phi_{yy}(\tau)$，求 $\phi_{zz}(\tau)$。又知 $S_{xx}(f)$ 和 $S_{yy}(f)$，求 $S_{zz}(f)$。

解：直接按定义计算，

$$\begin{aligned}\phi_{zz}(t_1,t_2)&=E[z(t_1)\cdot z(t_2)]\\&=E[x(t_1)y(t_1)x(t_2)y(t_2)]\\&=E[x(t_1)x(t_2)]E[y(t_1)y(t)_2].\end{aligned}\qquad(1)$$

因为两独立无关随机过程乘积的期望值等于各自期望的乘积，又因为过程是平稳的，故上式简化为

$$\phi_{zz}(\tau)=\phi_{xx}(\tau)\cdot\phi_{yy}(\tau).$$

在时差域中相乘，相当于在频率域中求卷积，因而有

$$S_{zz}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f-f')S_{yy}(f')df'.$$

例题 4-7 线性系统 $H(f)$ 的输入 $x[t]$ 是平稳随机过程，且具有自谱 $S_{xx}(f)$。设 $y(t)$ 为输出，并定义 $e(t)=y(t)-x(t)$，求 $S_{ee}(f)$。

解：$e(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned}\phi_{ee}(\tau)&=E[e(t)e(t+\tau)]\\&=E[\{y(t)-x(t)\}\{y(t+\tau)-x(t+\tau)\}]\\&=\phi_{yy}(\tau)-\phi_{xy}(\tau)-\phi_{xy}(-\tau)+\phi_{xx}(\tau),\end{aligned}$$

对上式两边各项分别进行付里叶变换，得

$$
\begin{aligned}
S_{ee}(f) &= S_{yy}(f) - S_{xy}(f) - S_{xy}^*(f) + S_{xx}(f) \\
&= |H(f)|^2 S_{xx}(f) - H(f) S_{xx}(f) - \\
&\quad H^*(f) S_{xx}(f) + S_{xx}(f) \\
&= \{|H(f)|^2 - [H(f) + H^*(f)] + 1\} S_{xx}(f) \\
&= \{A^2(f) + B^2(f) - 2A(f) + 1\} S_{xx}(f) \\
&= \{[A(f) + 1]^2 + B^2(f)\} S_{xx}(f),
\end{aligned}
$$

式中 $A(f)$，$B(f)$分别为 $H(f)$的实部和虚部，即

$$H(f) = A(f) + iB(f).$$

可见，$S_{ee}(f)$确实是实偶函数.

例题 4-8 已知一有限带宽白噪声的自功率谱密度函数为

$$
W_{xx}(f) = \begin{cases} a & \left(0 < \left[f_0 - \dfrac{B}{2}\right] \leqslant f \leqslant \left[f_0 + \dfrac{B}{2}\right]\right), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}
$$

其中 f_0 为中心频率，B 为带宽，a 为常数。求自相关函数。

解：进行付里叶变换，得

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= \int_{f_0-\frac{B}{2}}^{f_0+\frac{B}{2}} a\cos 2\pi f\tau df \\
&= aB\left(\frac{\sin\pi B\tau}{\pi B\tau}\right)\cos 2\pi f_0\tau. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

讨论：(1) 当$f_0 = \dfrac{B}{2}$时，本题的自谱变为

$$
W_{xx}(f) = \begin{cases} a & (0 \leqslant f \leqslant B), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}
$$

和

$$\phi_{xx}(\tau) = aB\left(\frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}\right). \qquad (2)$$

(2) 对于白噪声

$$W_{xx}(f) = a \qquad (f \geqslant 0).$$

此时双边自谱为

$$S_{xx}(f)=\frac{a}{2},$$

$$\therefore\quad \phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{2}e^{i2\pi f\tau}df=\frac{a}{2}\delta(\tau). \qquad (3)$$

(3)式也可由(2)式取极限得到

$$\phi_{xx}(\tau)=\lim_{B\to\infty}aB\left(\frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}\right)$$

$$=\lim_{B\to\infty}\frac{a}{2}\left(\frac{\sin 2\pi B\tau}{\pi\tau}\right)$$

$$=\frac{a}{2}\delta(\tau). \qquad (4)$$

所得结果(4)式中应用了定义δ函数的重要函数式：

$$\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{\sin kt}{\pi t}.$$

例题 4-9 已知某振动系统的输入为力，输出为位移，且位移响应$y(t)$的自功率谱为：

$$S_{yy}(\omega)=\frac{a}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}\qquad(-\infty<\omega<\infty).$$

求响应的自相关函数和均方值。

解：直接将自谱进行逆付里叶变换，得

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}d\omega. \qquad (1)$$

(1)式的积分，可应用留数定理中的约当引理，现在复变函数

$$f(z)=\frac{e^{iz\tau}}{(\omega_0^2-z^2)^2+4\zeta^2\omega_0^2z^2}, \qquad (2)$$

由于$1/[(\omega_0^2-z^2)^2+4\zeta^2\omega_0^2z^2]$是$z$的偶函数，其奇点关于实轴对称。故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i\left\{\frac{e^{iz|\tau|}}{(\omega_0^2 - z^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2 z^2}\text{在上半平面留数之和}\right\}. \tag{3}$$

类似的方法已在前面应用过，如例题 1-6。

先求$f(z)$的奇点，即求下列方程的根

$$(\omega_0^2 - z^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2 z^2 = 0,$$

或

$$\omega_0^4 + 2\omega_0^2 z^2(2\zeta^2 - 1) + z^4 = 0. \tag{4}$$

假定系统是小阻尼的，即 $\zeta<1$，由(4)式解得

$$z^2 = \omega_0^2[(1-2\zeta^2) \pm 2\zeta i\sqrt{1-\zeta^2}]. \tag{5}$$

为了将(5)式开平方，先将其右端写成指数形式，即令

$$z^2 = re^{i\varphi}, \tag{6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} r &= \omega_0^2\sqrt{(1-2\zeta^2)^2 + (2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})^2} = \omega_0^2, \\ \text{tg}\varphi &= \pm\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \omega_0 e^{i\frac{\varphi}{2}} = \omega_0\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right); \\ z_2 &= \omega_0 e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)} = \omega_0\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right] \\ &= -\omega_0\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

当 $\text{tg}\varphi$ 如(7)式所示时，由例题图 4-9-1 得

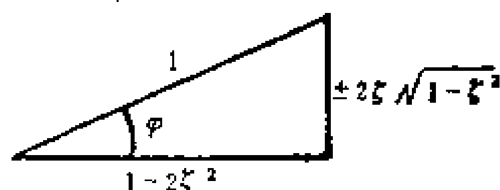
$$\cos\varphi = 1 - 2\zeta^2,$$

$$\sin\varphi = \pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2},$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},$$

$$= \pm\sqrt{1-\zeta^2},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \pm\zeta.$$



例题图 4-9-1

将此结果代入(8)式，得

$$z=\omega_0(\pm\sqrt{1-\delta^2}\pm i\xi). \tag{9}$$

所以在上半平面的奇点为 $\omega_0(\pm\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz\tau}}{(\omega_0^2-z^2)^2+4\xi^2\omega_0^2z^2}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{iz|\tau|}}{[\omega_0^4+2\omega_0^2z^2(2\xi^2-1)+z^4]'}\bigg|_{z=\omega_0(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)}+\frac{e^{iz|\tau|}}{[\omega_0^4+2\omega_0^2z^2(2\xi^2-1)+z^4]'}\bigg|_{z=\omega_0(-\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{iz|\tau|}}{4z^3+4z\omega_0^2(2\xi^2-1)}\bigg|_{z=\omega_0(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)}+\frac{e^{iz|\tau|}}{4z^3+4z\omega_0^2(2\xi^2-1)}\bigg|_{z=\omega_0(-\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{i|\tau|\omega_0(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)}}{4\omega_0(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)[\omega_0^2(2\xi^2-1)+\omega_0^2(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)^2]}+\frac{e^{i|\tau|\omega_0(-\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)}}{4\omega_0(-\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)[\omega_0^2(2\xi^2-1)+\omega_0^2(-\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)^2]}\right]$$

$$=\frac{2\pi ie^{-|\tau|\xi\omega_0}}{4\omega_0^3}\left[\frac{e^{i|\tau|\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}{(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)\,2i\xi\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{e^{-i|\tau|\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}{-(-\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)\,2i\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right]$$

$$=\frac{2\pi ie^{-|\tau|\xi\omega_0}}{4\omega_0^3\cdot 2i\xi\sqrt{1-\xi^2}}\left[\frac{e^{i|\tau|\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}{\sqrt{1-\xi^2}+i\xi}+\frac{e^{-i|\tau|\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}{\sqrt{1-\xi^2}-i\xi}\right]. \tag{10}$$

记　$\omega_0\sqrt{1-\xi^2}=\omega_d$，则上式可写成

$$\frac{\pi e^{-|\tau|\xi\omega_0}}{4\omega_0^3\xi\sqrt{1-\xi^2}}[(\cos\omega_d\tau+i\sin\omega_d|\tau|)(\sqrt{1-\xi^2}-i\xi)+(\cos\omega_d\tau-i\sin\omega_d|\tau|)(\sqrt{1-\xi^2}+i\xi)]$$

$$=\frac{\pi e^{-|\tau|\xi\omega_0}}{4\,\omega_0^3\xi\sqrt{1-\xi^2}}\cdot 2\left[\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d\tau+\xi\sin\omega_d|\tau|\right]$$

$$=\frac{\pi e^{-|\tau|\xi\omega_0}}{2\,\xi\omega_0^3}\left[\cos\omega_d\tau+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d|\tau|\right]. \tag{11}$$

于是均方值为

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(\omega)d\omega=\phi_{yy}(0)=\frac{a\,\pi}{2\,\xi\omega_0^3}. \tag{12}$$

例题 4-10 设 $X[t]$是广义平稳随机过程，其自相关函数

$$\phi_{xx}(\tau)=\begin{cases}\sigma^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{\tau_0}\right) & (0\leqslant|\tau|\leqslant\tau_0),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

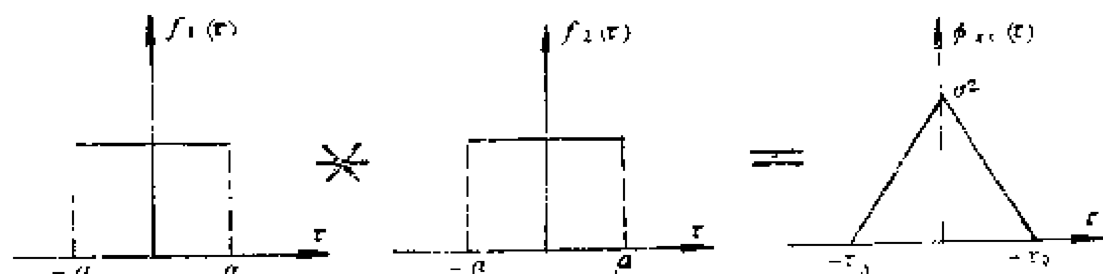
式中 σ 是一个正常数。求这个过程的自功率谱密度函数，并画出 $\phi_{xx}(\tau)$和 $S_{xx}(f)$的图形。

解：如果本题应用付里叶变换

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau.$$

直接计算，理论上虽然是可行的，但运算较繁，如果根据"卷积的付里叶变换是各因子付里叶变换后的乘积"的性质，将比较方便。由于本题所给的 $\phi_{xx}(\tau)$是 τ 的两个同样函数卷积的结果（如例题图 4-10-1 所示），即有

$$f_1(\tau)*f_2(\tau)=\phi_{xx}(\tau).$$



例题图 4-10-1

因此余下的工作只是计算常数 A和 a 值。例题图 4-10-1 中的 f_1

$f_1(\tau)$和 $f_2(\tau)$的卷积结果可用例题图 4-10-2 表示，比较两图后，得

$$\begin{cases} 2aA^2 = \sigma^2; \\ 2a = \tau_0. \end{cases}$$

$$\therefore \quad A = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau_0}},$$

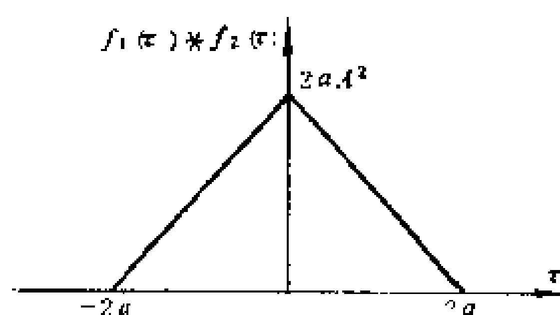
$$a = \frac{\tau_0}{2}.$$

因此，

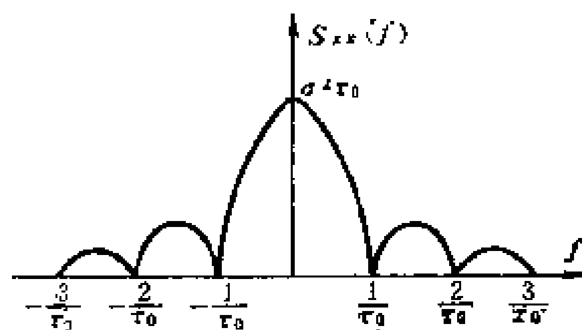
$$f_1(\tau) = f_2(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{\tau_0}} & \left(-\dfrac{\tau_0}{2} \leqslant \tau \leqslant +\dfrac{\tau_0}{2}\right), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

又知 $f_1(\tau)$和 $f_2(\tau)$的付里叶变换为

$$F(f) = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau_0}} \frac{\sin\left[2\pi f\left(\dfrac{\tau_0}{2}\right)\right]}{\pi f} = \frac{\sigma\sin(\pi f\tau_0)}{\sqrt{\tau_0}\,\pi f},$$



例题图 4-10-2



例题图 4-10-3

又因为

$$\phi_{xx}(\tau) = f_1(\tau) * f_2(\tau),$$

则

$$S_{xx}(f) = F(f)\cdot F(f) = \left(\frac{\sigma\sin(\pi f\tau_0)}{\sqrt{\tau_0}\,\pi f}\right)^2$$

$$= \frac{\sigma^2\sin^2(\pi f\tau_0)}{\tau_0\pi^2 f^2}.$$

$S_{xx}(f)$与 f 的关系表示在例题图 4-10-3 上。

例题 4-11 已知某随机过程的自功率谱密度函数为

$$S_{xx}(f)=\frac{1}{[1+(2\pi f)^2]^2},$$

求自相关函数。

解：将原题的频率 f 改为圆频率

$$S_{xx}(\omega)=\frac{S_{xx}(f)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi[1+\omega^2]^2}. \tag{1}$$

方法 1

$$\phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\tau\, d\omega}{(1+\omega^2)^2}. \tag{2}$$

上式演算中应用了奇函数在对称区间上的积分为零的性质。为了求(2)式的积分，先引进参数 α，令

$$f(\alpha,\tau)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\tau\, d\omega}{(\alpha^2+\omega^2)}\qquad(\alpha,\tau>0), \tag{3}$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\int_0^{\infty}\frac{-2\alpha\cdot\cos\omega\tau\, d\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2}, \tag{4}$$

比较(2)式和(4)式，得

$$\phi_{xx}(\tau)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=1}. \tag{5}$$

对于(3)式，可积分得

$$f(\alpha,\tau)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\tau}\qquad(\alpha,\tau>0), \tag{6}$$

再利用(5)式，得

$$\phi_{xx}(\tau)=\frac{1}{4}(1+\tau)e^{-\tau}. \tag{7}$$

对于 $\tau<0$ 的情况，也可得到类似的结果。最后将 $\phi_{xx}(\tau)$ 写成统一表达式

$$\phi_{xx}(\tau)=\frac{1}{4}(1+|\tau|)e^{-|\tau|}. \tag{8}$$

讨论：

(1) 上式积分(3)式称为含参积分，运算中交换了积分与求导的次序，可以证明这种交换是允许的。

(2) 上述积分也可以应用复变函数的留数定理求得。

(3) (8)式也可以应用 $\phi_{xx}(\tau)$是偶函数的性质直接写出。

(4) 上面(6)式的证明如下：

$$\because \qquad \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}=\int_0^{\infty}e^{-t(\alpha^2+\omega^2)}dt,$$

$$\begin{aligned}
\therefore \qquad f(\alpha,\tau)&=\int_0^{\infty}\cos\omega\tau\, d\omega\int_0^{\infty}e^{-t(\alpha^2+\omega^2)}dt\\
&=\int_0^{\infty}e^{-t\alpha^2}dt\int_0^{\infty}e^{-t\omega^2}\cos\omega\tau\, d\omega\\
&=\int_0^{\infty}e^{-t\alpha^2}dt\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\tau^2/4t}\right)\\
&=\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2z^2-\tau^2/4z^2}dz \qquad (\text{这里用 } z^2 \text{代 } t)\\
&=\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\alpha\tau}\cdot e^{-\left(\alpha z-\frac{\tau}{2z}\right)^2}dz\\
&=\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\tau}\int_0^{\infty}e^{-\left(\alpha z-\frac{\tau}{2z}\right)^2}dz,
\end{aligned}$$

又因为

$$\int_0^{\infty}f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx=\frac{1}{A}\int_0^{\infty}f(y^2)dy \qquad (A,\ B>0),$$

因此，最后就得到

$$f(\alpha,\tau)=\frac{\pi}{2\alpha}\cdot e^{-\alpha\tau} \qquad (\alpha,\tau>0).$$

上面积分过程中，曾用到

$$\int_0^\infty e^{-t\omega^2}\cos\omega\tau\,d\omega=\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{-t\omega^2+j\omega\tau}d\omega\right\},$$

作简单变换后，再应用公式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

最后可以得

$$\int_0^\infty e^{-t\omega^2}\cos\omega\tau\,d\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\tau^2/4t}.$$

另外，在式$\int_0^\infty f(y^2)dy$ 中令 $y=Ax-\frac{B}{x}$，则积分化成

$$\int_0^\infty f(y^2)dy=\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\left(A+\frac{B}{x^2}\right)dx,$$

对后一项积分再作变换，令

$$x=\frac{B}{At},$$

则

$$B\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x^2}=A\int_0^\infty f\left[\left(At-\frac{B}{t}\right)^2\right]dt$$

$$=A\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx.$$

于是　　$$\int_{-\infty}^\infty f(y^2)dy=2A\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx,$$

或

$$\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^\infty f(y^2)dy$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^\infty f(y^2)dy.$$

方法 2

不采用直接逆付里叶变换方法求 $\phi_{xx}(\tau)$，而是设某随机过程的自相关函数为

$$\phi_{yy}(\tau)=\frac{1}{2}e^{-|\tau|},\tag{9}$$

则自功率谱密度函数为

$$S_{yy}(f)=\frac{1}{[1+(2\pi f)^2]}. \tag{10}$$

本题给的自谱与(10)式相比，得

$$S_{xx}(f)=[S_{yy}(f)]^2. \tag{11}$$

应用在频域中相乘，相当于在时域中的卷积的关系，所以有

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=\phi_{yy}(\tau)*\phi_{yy}(\tau)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|z|}\cdot\frac{1}{2}e^{-|\tau-z|}dz.\end{aligned} \tag{12}$$

当 $\tau\geqslant 0$ 时，上式写为

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau)&=\frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{z}e^{-(\tau-z)}dz+\right.\\&\left.\quad+\int_{0}^{\tau}e^{-z}e^{-(\tau-z)}dz+\int_{\tau}^{\infty}e^{-z}e^{\tau-z}dz\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}e^{-\tau}+\tau e^{-\tau}+\frac{1}{2}e^{-\tau}\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(e^{-\tau}+\tau e^{-\tau}\right).\end{aligned}$$

因为自相关函数为偶函数，即

$$\phi_{xx}(-\tau)=\phi_{xx}(\tau),$$

$$\begin{aligned}\therefore\qquad \phi_{xx}(\tau)&=\frac{1}{4}\left\{e^{-|\tau|}+|\tau|e^{-|\tau|}\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1+|\tau|\right)e^{-|\tau|}.\end{aligned}$$

例题 4-12 已知自功率谱密度函数

$$S_{xx}(f)=\begin{cases}8\delta(f)+20\left(1-\dfrac{|f|}{10}\right)\text{厘米}^2/\text{赫} & (|f|<10),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

求均方值、方差和自相关函数。

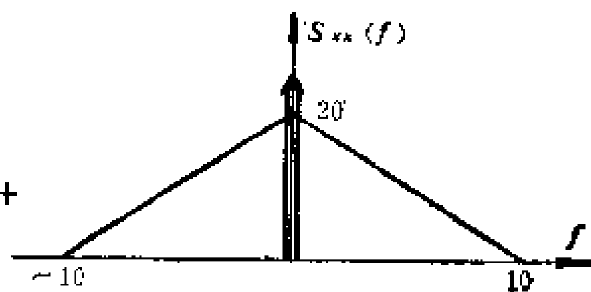
解： 应用公式(4-5)，

$$E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)df$$

$$=\int_{-10}^{0}20\left(1+\frac{f}{10}\right)df+$$

$$+\int_{0}^{10}20\left(1-\frac{f}{10}\right)df+$$

$$+\int_{-10}^{10}8\delta(f)df$$



例题图 4-12-1

$$=208(\text{厘米}^2)$$

$$m_x=\sqrt{\int_{0-}^{0+}S_{xx}(f)df}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}(\text{厘米}),$$

$$D_x=E[x^2]-m_x^2=208-8=200(\text{厘米}^2),$$

$$\phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=8\int_{-10}^{10}\delta(f)e^{i2\pi f\tau}df+20\int_{-10}^{10}e^{i2\pi f\tau}df+$$

$$+2\int_{-10}^{0}fe^{i2\pi f\tau}df-2\int_{0}^{10}fe^{i2\pi f\tau}df$$

$$=8+\frac{20}{\pi\tau}\sin 20\pi\tau+\frac{1}{\pi^2\tau^2}-\frac{20}{\pi\tau}\sin 20\pi\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi^2\tau^2}\cos 20\pi\tau$$

$$=8+\frac{1}{\pi^2\tau^2}-\frac{1}{\pi^2\tau^2}\cos 20\pi\tau$$

$$=8+\frac{2}{\pi^2\tau^2}\sin^2 10\pi\tau\quad(\text{厘米}^2).$$

例题 4-13 设平稳随机过程 $x[t]$ 的自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}$，其中 $\alpha>0$，$A>0$，求：

(a) 平均值 m_x；

(b) 均方值 ψ_x^2；

(c) 自功率谱密度函数 $S_{xx}(f)$ 和 $W_{xx}(f)$；

(d) α 值的物理意义．

解：(a) $m_x^2=\phi_{xx}(\pm\infty)=Ae^{-\alpha|\pm\infty|}=0$，

$\therefore \qquad m_x=0$.

(b) $\phi_{xx}(0)=\psi_x^2=Ae^{-\alpha|0|}=A$.

(c) 参照例题 1-4(a)的结果，知

$$S_{xx}(\omega)=\frac{A}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right) \quad (-\infty<\omega<\infty),$$

$$\therefore \quad S_{xx}(f)=2\pi S_{xx}(\omega=2\pi f)=\frac{2A\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}$$

$$(-\infty<f<\infty).$$

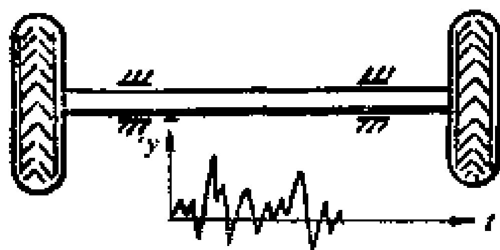
$$W_{xx}(f)=\begin{cases}\dfrac{4A\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2} & (0\leqslant f\leqslant\infty),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

(d) 若 α 的数值大，表示 $\phi_{xx}(\tau)$ 曲线衰减很快，即 t 时刻的波形与$(t+\tau)$时刻的波形相似程度差，则此平稳随机过程所包含的频率丰富；若 α 的数值小，表示 $\phi_{xx}(\tau)$曲线衰减较慢，则此平稳随机过程的频带狭窄。

例题 4-14 车辆行驶时，其前桥上某处应变值为平稳随机过程 $y[t]$，且单边谱为

$$W_{yy}(f)=\begin{cases}0.01(1/\text{赫}) & 0\leqslant f\leqslant 200(\text{赫}),\\ 0 & f>200(\text{赫}).\end{cases}$$

求应变的均方值及应变随机过程的自相关函数。



例题图 4-14-1

解：

$$E[y^2]=\int_0^\infty W_{yy}(f)df$$

$$=\int_0^{200}0.01\,df$$

$$=2.$$

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=0.005\int_{-200}^{200}e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=\frac{0.005}{i\tau\cdot 2\pi}(e^{i2\pi\cdot 200\tau}-e^{-i2\pi\cdot 200\tau})$$

$$=\frac{0.01}{2\pi}\frac{\sin 200\cdot 2\pi\cdot\tau}{\tau}=\frac{0.005\sin 400\pi\tau}{\pi\tau}.$$

例题 4-15 已知某平稳随机过程 $x[t]$ 的自相关函数为 $\phi_{xx}(\tau)=25e^{-4|\tau|}\cos 2\pi f\tau+16$，单位为 g^2(重力加速度)，求 m_x，D_x 和 $S_{xx}(f)$。

解：因为 $S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$，应用奇函数在无限区域积分为零的性质，有

$$S_{xx}(f)=2\int_0^{\infty}(25e^{-4\tau}\cos 2\pi f\tau+16)\cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$=50\int_0^{\infty}e^{-4\tau}\cos^2 2\pi f\tau d\tau+32\int_0^{\infty}\cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$=25\left\{\left[-\frac{e^{-4\tau}}{4}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{4(\pi^2 f^2+1)}\right\}+16\delta(f)$$

$$=\frac{25}{4}\left(1+\frac{1}{\pi^2 f^2-1}\right)+16\delta(f),$$

计算平均值为

$$m_x=\sqrt{\int_{0-}^{0+}S_{xx}(f)df}=\sqrt{16}=4(g),$$

均方值为

$$E[x^2]=\phi_{xx}(0)=41(g^2),$$

方差为

$$D_x=E[x^2]-m_x^2=41-16=25(g^2),$$

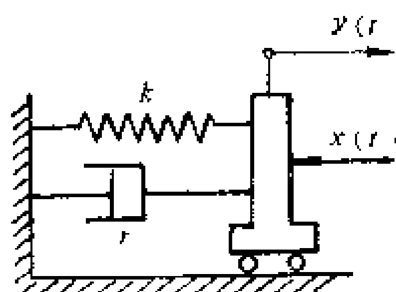
标准离差

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=5(g).$$

例题 4-16 设有一频率为 f_0 的按正弦波规律变化的力 $x(t)$ 作用于图示系统上，此正弦波的单边自功率谱密度为

$$W_{xx}(f)=\frac{x_0^2}{2}\delta(f-f_0),$$

式中 $f_0>0$，若无质量小车位移响应 $y(t)$ 的自功率谱密度函数按式 $W_{yy}(f)=|H(f)|^2W_{xx}(f)$ 计算．求输出的均方值和输出的自相关函数



例题图 4-16-1

解：应用公式算得

$$W_{yy}(f)=\frac{\frac{x_0^2}{2}\delta(f-f_0)}{4\pi^2f^2r^2+k^2},$$

均方值为

$$\psi_y^2=\int_0^\infty W_{yy}(f)\,df=\frac{x_0^2/2}{k^2+4\pi^2f_0^2r^2}.$$

自相关函数

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_0^\infty W_{yy}(f)\cos 2\pi f\tau\,df$$

$$=\frac{x_0^2/2}{k^2+4\pi^2f_0^2r^2}\cos 2\pi f_0\tau.$$

例题 4-17 若一个实随机过程，它具有有限均方值的有理自功率谱密度为

$$S_{yy}(f)=C\frac{(2\pi f-n_1)(2\pi f-n_2)\cdots(2\pi f-n_N)}{(2\pi f-d_1)(2\pi f-d_2)\cdots(2\pi f-d_M)}\quad(n_i\neq d_j),$$

式中 N 和 M 是偶数，C 为常数．试证明以下几点：

(a) $S_{yy}(f)=S_{yy}(-f)$；

(b) C 是实数；

(c) $N<M$.

解：(a) 从付里叶变换知

$$S_{yy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{yy}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{yy}(\tau)[\cos 2\pi f\tau-i\sin 2\pi f\tau]d\tau. \qquad (1)$$

因为 $\phi_{yy}(\tau)$ 是一个实随机过程的自相关函数，所以它是 τ 的实偶函数。因此(1)式中 $\sin(2\pi f\tau)\cdot\phi_{yy}(\tau)$的积分为零，故

$$S_{yy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{yy}(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau. \tag{2}$$

由此可见，$S_{yy}(f)$是 f 的实偶函数。

(b) 若 f 趋向很大时，则

$$S_{yy}(f)\to C(2\pi f)^{N-M}. \tag{3}$$

因为对于所有的 f，$S_{yy}(f)$是实非负偶函数，所以从(3)式中可见 C 必须是实数。

(c) 题意中已知 $\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)df$ 是有限值，则必定有

$$\lim_{f\to\infty}S_{yy}(f)=0, \tag{4}$$

当 f 很大时

$$S_{yy}(f)\doteq\frac{C}{(2\pi f)^{M-N}}, \tag{5}$$

所以有

$$M-N>0,$$

得

$$M>N.$$

又因为题意中已知M和N是偶数，所以$M\geq N+2$。

讨论：上面几点证明，在工程上意味着$S_{yy}(f)$总可以写成

$$S_{yy}(f)=|H(f)|^2,$$

式中 $H(f)$是一个稳定的可实现的滤波器，并且 $H^{-1}(f)$也是另一个可实现的稳定滤波器。

例题 4-18 车辆受道路激励时，一般输入随机过程的自谱为

$$S_{xx}(f)=\frac{\beta^2}{(2\pi f)^2+\beta^2},$$

可以看出

$$\lim_{\beta\to\infty}[S_{xx}(f)]=1.$$

(a) 若以 $y(t)$ 表示响应，求 $\phi_{yx}(\tau)$ 的表示式。

(b) 若系统的脉冲响应函数 $h(\tau)=e^{-\alpha\tau}u_{-1}(\tau)$，式中 $u_{-1}(\tau)$ 为单位阶跃函数，即

$$u_{-1}(\tau)=\begin{cases}1 & (\tau>0),\\ 0 & (\tau<0).\end{cases}$$

试计算 $\phi_{yx}(\tau)$。

(c) 若误差表示为

$$h_e(\tau:\beta)=\phi_{yx}(-\tau)-h(\tau)\quad(\tau\geqslant 0),$$

试证明

$$\lim_{\beta/\alpha\to\infty}[h_e(\tau:\beta)]=0.$$

解： (a) 本题在频域内计算较容易，当激励是平稳随机过程时，

$$\phi_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\phi_{xx}(\tau+u)du, \tag{1}$$

经变换后

$$S_{yx}(f)=H^*(f)S_{xx}(f). \tag{2}$$

将已给的输入谱代入(2)，得

$$S_{yx}(f)=\frac{H^*(f)\beta^2}{(2\pi f)^2+\beta^2}, \tag{3}$$

$$\therefore\quad \phi_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yx}(f)e^{i2\pi f\tau}df. \tag{4}$$

(b) 若 $h(\tau)=e^{-\alpha\tau}u_{-1}(\tau)$，则进行付里叶变换后，得

$$H(f)=\frac{1}{(i2\pi f)+\alpha}. \tag{5}$$

上式代入(3)式，得

$$S_{yx}(f)=\frac{\beta^2}{[(-i2\pi f)+\alpha][(2\pi f)^2+\beta^2]}$$

$$=\beta^2\left\{\frac{\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha-i2\pi f}+\frac{\frac{1}{2\beta(\beta-\alpha)}}{i2\pi f-\beta}+\frac{\frac{1}{2\beta(\beta+\alpha)}}{i2\pi f+\beta}\right\}, \tag{6}$$

$$\therefore \quad \phi_{yx}(\tau)=\beta^2\left\{\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}e^{\alpha\tau}u_{-1}(-\tau)+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\beta(\alpha-\beta)}e^{\beta\tau}u_{-1}(-\tau)+\frac{1}{2\beta(\beta+\alpha)}e^{-\beta\tau}u_{-1}(\tau)\right\}. \tag{7}$$

(c) 误差是

$$h_e(\tau:\beta)=\phi_{yx}(-\tau)-h(\tau) \quad (\tau\geqslant 0). \tag{8}$$

因此，

$$h_e(\tau:\beta)=\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}e^{-\alpha\tau}u_{-1}(\tau)-\frac{\beta^2}{2\beta(\alpha-\beta)}e^{-\beta\tau}u_{-1}(\tau)-$$

$$-e^{-\alpha\tau}u_{-1}(\tau)$$

$$=\frac{1}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}-1}e^{-\alpha\tau}u_{-1}(\tau)-\frac{1}{2\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)}e^{-\beta\tau}u_{-1}(\tau),$$

当 $\beta/\alpha\to\infty$ 时，$\alpha/\beta\to 0$，此时上式第一项的系数趋于零，而 $e^{-\alpha\tau}$ 为有限值；第二项的系数为有限值，而 $e^{-\beta\tau}$ 趋于零。故对所有的 $\tau\geqslant 0$，

$$\lim_{\beta/\alpha\to\infty}[h(\tau:\beta)]=0.$$

第四章习题

习题 4-1 对于一个复杂的信号或随机过程，在时域、幅域、时差域、频率域中需用哪些信息函数来描述？试说明每个信息函数的数学性质（如确定的或是随机的变量？实函数还是复函数？偶函数还是奇函数或其它函数？）和物理意义。

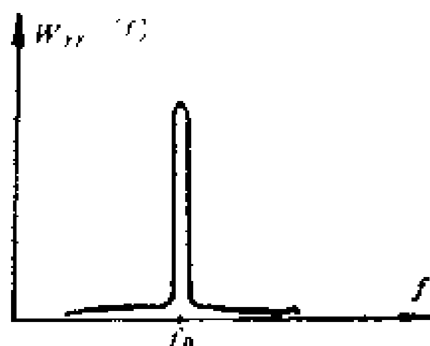
习题 4-2 从随机过程 $x(t)$ 的自功率谱密度函数图也可以分析该过程在其它各域的信息，如 $\phi_{xx}(\infty)$，$E[x^2]$，$E[x]$，σ_x^2 等？那么是否不必进行其它域的处理了呢？为什么？

习题 4-3 某过程的自功率谱密度图如习题图 4-3 所示，可否断言该过程一定是周期性信号？为什么？

习题 4-4 若激励和响应的互谱密度分布在 $0\to\infty$ 的频率范围内，则

其中信號可用区域如何确定？为什么？

习题 4-5 假定某平稳随机过程在 $f=0$ 时的自谱密度为零，试证明此过程的自相关函数满足



习题图 4-3

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)d\tau=0.$$

习题 4-6 某线性系统的激励随机信号 $x[t]$ 中混入了高频噪声，响应为随机信号 $y[t]$。若已知各随机过程都是平稳的，且噪声的均值为零，与 $y[t]$ 独立无关。求证该噪声的混入并不影响主要信号的互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$。

习题 4-7 假设平稳随机过程 $x[t]$ 的自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$ 和功率谱密度函数 $S_{xx}(\omega)$ 为已知。试用 $\phi_{xx}(\tau)$ 和 $S_{xx}(\omega)$ 来表示 $\phi_{x\dot{x}}(\tau)$，$\phi_{\dot{x}x}(\tau)$，$\phi_{\ddot{x}x}(\tau)$，$\phi_{\ddot{x}x}(\tau)$，$\phi_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau)$，$\phi_{\ddot{x}\dot{x}}(\tau)$ 和 $S_{x\dot{x}}(\omega)$，$S_{\dot{x}x}(\omega)$，$S_{x\ddot{x}}(\omega)$，$S_{\ddot{x}x}(\omega)$，$S_{\dot{x}\ddot{x}}(\omega)$，$S_{\ddot{x}\dot{x}}(\omega)$。

习题 4-8 导出习题 2-16 中所定义的平稳随机过程 $x[t]$ 的自相关函数和自功率谱密度函数。

答案： $\phi_{xx}(\tau)=\dfrac{1}{2}(\sigma_A^2+m_A^2)\sum\limits_{n=1}^{10}\cos n\omega_0\tau$，

$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{8\pi}(\sigma_A^2+m_A^2)\sum_{n=-10}^{10}\delta(\omega+n\omega_0).\quad(n\neq 0)$$

习题 4-9 如果平稳随机过程具有自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)=A(b^2-\tau^2)e^{-a\tau^2}$，式中 A，b 为常数，求其自功率谱密度函数和均方值。

答案： $S_{xx}(\omega)=\dfrac{A}{2\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\left[b^2-\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\omega^2}{4a}\right)\right]$，

$$E[x^2]=Ab^2.$$

习题 4-10 平均值为零的某平稳随机过程的自相关函数为 $\phi_{xx}(\tau)=\sigma_x^2e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$，式中 σ_x^2，α，β 为常数。试求其自功率谱密度函数。

答案： $S_{xx}(\omega)=\dfrac{2\sigma_x^2}{\pi}\cdot\dfrac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

习题 4-11 如果两随机过程的联合概率密度函数满足 $p(x, y)=p(x)p(y)$，则下列各性质是否成立？

(a) 对所有的滞后时间 τ，两过程之间的互相关函数为零；

(b) 对所有的频率 f，两过程之间的互谱密度函数为零；

(c) 对所有的频率 f，两过程之间的凝聚函数为零。

习题 4-12 已知平稳随机过程 $x[t]$ 的自谱密度为

$$S_{xx}(\omega)=S_0\left[\frac{\omega^2+2\beta^2}{\omega^4+5\beta^2\omega^2+4\beta^4}\right],$$

式中 S_0，β 为常数，且 $\beta>0$。求自相关函数和均方值。（提示：应用留数定理计算）

答案：$\phi_{xx}(\tau)=\dfrac{\pi S_0}{3\beta}(e^{-\beta|\tau|}+e^{-2\beta|\tau|})$，

$$E[x^2]=\phi_{xx}(0)=\frac{2\pi S_0}{3\beta}.$$

习题 4-13 已知某系统受位移输入，其位移输出之单边自功率谱密度函数为

$$W_{yy}(f)=\frac{a[1+(2\zeta f/f_n)^2]}{[1-(f/f_n)^2]^2+(2\zeta f/f_n)^2},$$

求响应的自相关函数和均方值。

答案：$\phi_{yy}(\tau)=\dfrac{a\pi f_n(1+4\zeta^2)}{4\zeta}e^{-2\pi f_n\zeta|\tau|}\left[\cos(2\pi f_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau)+\right.$

$$\left.+\frac{\zeta(1-4\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}\,(1+4\zeta^2)}\cdot\sin(2\pi f_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau)\right].$$

$$\psi_y^2=\frac{a\pi f_n(1+4\zeta^2)}{4\zeta}.$$

习题 4-14 考虑由如下方程所定义的线性系统：$r(t)=x(t-\delta)-x(t)$，$y(t)=\int_{-\infty}^{t}r(u)du$，式中 $x(t)$ 是输入，$y(t)$ 是输出。求系统的等效噪声带宽。

答案：$B_e=\dfrac{1}{2\delta}$.

参 考 文 献

[1] D. E. 纽兰，随机振动与谱分析概论，机械工业出版社，1980。

[2] 郑治真，波谱分析基础，地震出版社，1979。

[3] R. B Randall, B. Tech, B. A. Frequency Analysis. Brüel & Kjær, 1979.

第五章　振动系统动态特性的描述

所谓系统，是指能够完成一定任务的一系列互相联系的部件的集合，例如电力系统、机械系统、液压系统、生物系统等。

机械产品、工程结构或机器零部件通常是由若干弹性件、阻尼器和质量杆或质量块组成的，这个互相联系的组成物受外界激励后，其中某些特征量将随时间作往复变化，我们把这样的组成物称为机械振动系统或结构动力系统。由于上述系统内各个元件的型式、性能可以各不相同，组成形式也可以多种多样，这样，受到同一激励的不同系统，响应也一定是各不相同的。工程上往往需要系统具有最佳控制且在任何时刻或工作频率区域内都是稳定的，因而必须用一些性能指标或函数来描述系统的动态特性

无论是研究规则振动还是随机振动，都必须首先确定动态特性。当系统动态特性已知时，受已知激励后的响应才可以求得；反之，知道响应后也可以求得激励

一、内容提要

描述系统的动态特性有两种方法：

一种是在频域内用"频率响应函数"描述；另一种是在时域内用"脉冲响应函数"描述。它们之间存在着互为付里叶变换的关系。

1．频率响应函数

系统在单位幅值正弦激励 $x(t)$ 作用下，响应 $y(t)$ 的幅值称为系统的频率响应函数，用 $H(\omega)$ 表示。在一般情况下，$H(\omega)$ 是一个复函数，即

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{i\theta(\omega)}.\qquad(5\text{-}1)$$

$$|H(\omega)| = \frac{y_0}{x_0}, \tag{5-2}$$

$$\theta(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{H(\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(\omega)\}}. \tag{5-3}$$

式中$|H(\omega)|$为频率响应函数的模，又称系统的增益因子；$\theta(\omega)$为频率响应函数的相角，又称系统的相位因子。

频率响应函数可以完整地用幅频、相频、实频、虚频和幅相特性曲线来描述，它们是质量 m、刚度 k 和阻尼 r 的函数。

求 $H(\omega)$的步骤如下：

(1) 对系统进行受力分析和运动分析，并用图表示。

(2) 选取适当的坐标轴（相对坐标，绝对坐标）确定系统的自由度数。

(3) 应用动力学定理（如牛顿第二定律、动量矩定理、达朗伯原理、拉格朗日方程等）建立系统的激励和响应之间的微分方程式。

(4) 设激励为单位幅值的正弦输入 即 $x(t)=e^{i\omega t}$，则响应一定是激励的 $H(\omega)$ 倍，即

$$y(t)=H(\omega)\cdot e^{i\omega t}.$$

(5) 将激励和响应及其导数代入系统的运动方程并消去公因子 $e^{i\omega t}$,便可得系统的频率响应函数。或将系统的运动微分方程进行拉普拉斯变换，求出传递函数 $H(s)$，然后令 $s=i\omega$，即得频率响应函数。

2. 脉冲响应函数

对于稳定的、受激励之前处于静止状态的系统，在受到一个脉冲以后，系统的响应幅值会突然显示出来并随着时间衰减到原先平衡状态的位置。若系统在初始时受到单位脉冲 $\delta(t)$ 的激励，则产生的响应 $h(t)$称为脉冲响应函数。

工程上将单位脉冲定义为

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t\neq 0),\\ \infty & (t=0),\end{cases} \tag{5-4}$$

以及
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt=1. \tag{5-5}$$
函数 $\delta(t)$ 有一些重要性质：如
$$\int_{-\infty}^{\infty}X(t)\delta(t)dt=X(0), \tag{5-6}$$
或
$$\int_{-\infty}^{\infty}X(t)\delta(t-\tau)dt=X(\tau). \tag{5-7}$$
式中 $X(t)$ 是时间 t 的任意函数

$h(t)$在 $t<0$ 时是等于零的，一般情况下，它是一个时域的实不对称函数，且满足收敛条件
$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|<\infty. \tag{5-8}$$
函数 $h(t)$与系统的质量 m、刚度 k、阻尼 c 有关。

求 $h(t)$的步骤如下：

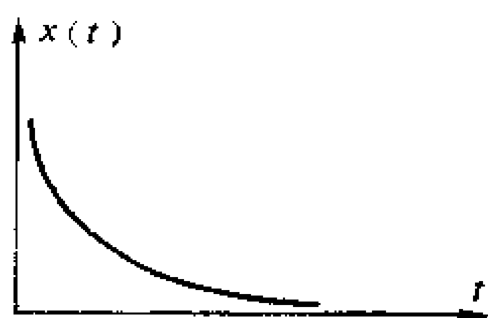
前面的三步与求 $H(\omega)$的步骤一样，此处略，只给出后面的两步。

（4）用单位脉冲函数 $\delta(t)$ 代替微分方程中的激励项，即令 $x(t)=\delta(t)$．并对方程两边从 0_-到 0_+进行积分，求得方程的通解。

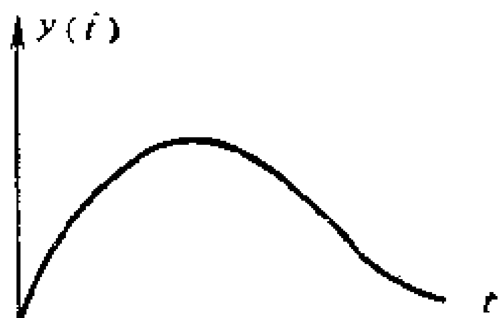
（5）应用初始条件确定解的积分常数，所得的特解 $y(t)$即为系统的脉冲响应函数 $h(t)$。

二、例　　题

例题 5-1　若一个线性系统的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 分别如下式和例题图 5-1-1、例题图 5-1-2 所示：
$$x(t)=\begin{cases}e^{-t} & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$
$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-b}\left(e^{-\frac{b}{a}t}-e^{-t}\right) & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$



例题图 5-1-1



例题图 5-1-2

求描述此系统动态特性的频率响应函数 $H(\omega)$。

解：首先将 $x(t)$和 $y(t)$分别进行付里叶变换：

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cos\omega t dt-i\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin\omega t dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{i\omega}{1+\omega^2}\right]=\frac{1-i\omega}{2\pi(1+\omega^2)}=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)},\tag{1}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{a-b}\left(e^{-\frac{b}{a}t}-e^{-t}\right)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi(a-b)}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{b}{a}t}\cos\omega t dt-i\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{b}{a}t}\sin\omega t dt\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cos\omega t dt+i\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin\omega t dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi(a-b)}\left[\frac{\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\omega^2}-\frac{1}{1+\omega^2}+\right.$$

$$\left.\frac{i\omega}{1+\omega^2}\right]=\frac{1}{2\pi(a-b)}\left[\frac{ba-i\omega a^2}{b^2+a^2\omega^2}+\frac{i\omega-1}{1+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(1-i\omega)(b-i\omega a)}{(b^2+a^2\omega^2)(1+\omega^2)}\right]=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)(b+i\omega a)}.\tag{2}$$

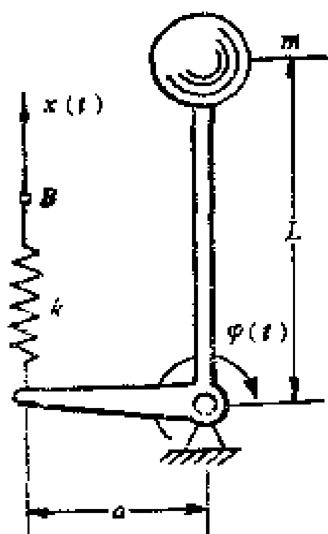
输入与输出的付里叶变换由频率响应函数相联系：

$$Y(\omega)=H_{xy}(\omega)\cdot X(\omega), \tag{3}$$

所以

$$H_{xy}(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)(b+i\omega a)}\Big/\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}=\frac{1}{b+i\omega a}. \tag{4}$$



例题图 5-2-1

讨论：(1) 由 (4) 式可见，$H_{xy}(\omega)$是一个复函数，这是由于系统存在着阻尼的缘故。

(2) 应用本题的方法，只要知道了系统的激励和响应，就可完全确定系统的动态特性，这在工程上具有重要的实际意义：例如在试验房屋结构的抗震特性、精密仪器包装系统的隔振特性时都要用到。

例题 5-2 如例题图 5-2-1 所示，直角杆一端与刚度为 k 的弹簧相连，另一端固结有质量 m，组成一个倒置摆。在弹簧的端点 B 处受到位移激励 $x(t)$，若不计直角杆及弹簧的重量，求对于杆的转角响应 φ 的频率响应函数。

解：(1) 分析直角杆的受力与运动。应用动量矩定理得系统运动微分方程为

$$ml^2\ddot{\varphi}+(\varphi a-x)ka-mgl\sin\varphi=0,$$

当 φ 很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$，上式可写成

$$ml^2\ddot{\varphi}+(ka^2-mgl)\varphi=kax(t). \tag{1}$$

这是二阶常系数线性非齐次微分方程。

(2) 设 $x(t)$为单位位移激励，即

$$x(t)=e^{i\omega t}, \tag{2}$$

则响应为

$$\varphi(t)=H_{x\varphi}(\omega)e^{i\omega t}. \tag{3}$$

将（2）、（3）式代入（1）式，得

$$H_{xy}(\omega)=\frac{ka}{-mgl+ka^2-\omega^2ml^2}. \tag{4}$$

讨论：（1）由于不计系统的阻尼，所以$H_{xy}(\omega)$是实函数。

（2）如果考虑直角杆及弹簧的质量，本题要用瑞利能量法通过积分求解。

（3）如果φ角不很小，$\sin\varphi$不能用φ来近似，那么系统的振动是非线性振动，此时频率响应函数已失去意义。

例题 5-3 在例题图 1-8-1 所示系统中，试求对于质量的速度响应和加速度响应的频率响应函数。

解：系统的运动微分方程为

$$m\ddot{y}+r\dot{y}+ky=P(t). \tag{1}$$

设

$$P(t)=P_0e^{i\omega t}, \tag{2}$$

则响应是激励的$H(\omega)$倍，即

$$y(t)=H_{Py}(\omega)P_0e^{i\omega t}. \tag{3}$$

速度响应和加速度响应分别为

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}(t)&=i\omega H_{Py}(\omega)P_0e^{i\omega t}=H_{P\dot{y}}(\omega)P_0e^{i\omega t},\\ \ddot{y}(t)&=-\omega^2H_{Py}(\omega)P_0e^{i\omega t}=H_{P\ddot{y}}(\omega)P_0e^{i\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将（2）、（3）式代入（1）式，得位移响应的频率响应函数为

$$H_{Py}(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ir\omega}. \tag{5}$$

速度响应的频率响应函数，可从（4）式求出

$$H_{P\dot{y}}(\omega)=\frac{i\omega}{k-m\omega^2+ir\omega}. \tag{6}$$

同样方法，得加速度响应的频率响应函数为

$$H_{P\ddot{y}}(\omega)=\frac{-\omega_2}{k-m\omega^2+ir\omega}. \tag{7}$$

讨论：（1）由（5）、（6）、（7）式可见，系统的动态特性不

仅与系统的参数 m，r，k 有关，而且与激励频率 ω 有关。这就是动态特性与静态特性不同之处。

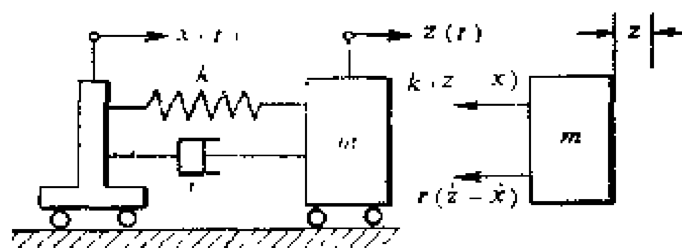
(2) 当 $\omega=0$ 时，$H_{Py}(\omega)=\dfrac{1}{k}$，$H_{P\dot{y}}(\omega)=0$，$H_{P\ddot{y}}(\omega)=0$，质量 m 只有静伸长，而速度、加速度都为零。此时仅表现静态特性。

(3) 三个频率响应函数在一般情况下都是复函数。在阻尼 $r=0$ 时，$H_{Py}(\omega)$ 和 $H_{P\ddot{y}}(\omega)$ 是实函数。

(4) 某系统的频率响应函数一旦确定，则其导出过程的频率响应函数也就完全确定了。

(5) 与例题 1-8 比较，可知传递函数在 $s=i\omega$ 时的值就是本题的位移响应频率响应函数［见（5）式］。

例题 5-4 例题图 5-4-1 所示的振动系统，以无质量小车的位移 $x(t)$ 或速度 $\dot{x}(t)$ 为激励，求对应于以下不同输出的频率响应函数：



例题图 5-4-1

(a) 对于质量 m 的绝对位移 $z(t)$，绝对加速度 $\ddot{z}(t)$ 的频率响应函数。

(b) 对于质量 m 的相对位移 $y(t)=z(t)-x(t)$ 和相对速度 $\dot{y}(t)=\dot{z}(t)-\dot{x}(t)$ 的频率响应函数。

解： (a) 对例题图 5-4-1 的质量 m 进行受力分析，并应用牛顿定律，得

$$m\ddot{z}=-k(z-x)-r(\dot{z}-\dot{x}).$$

将相对坐标 $y(t)=z(t)-x(t)$ 代入上式，得响应以相对坐标表

示的振动微分方程为

$$m\ddot{y}+ky-r\ddot{y}=-m\ddot{x}. \tag{1}$$

将上式变为绝对坐标，得

$$m\ddot{z}+r\dot{z}+kz=r\dot{x}+kx. \tag{2}$$

设单位正弦激励，$x=e^{i\omega t}$，则绝对位移响应

$$z(t)=H_{xz}(\omega)e^{i\omega t}. \tag{3}$$

代入（2）式，得位移激励对绝对位移响应的频率响应函数为

$$H_{xz}(\omega)=\frac{k+i\omega r}{(k-m\omega^2)+ir\omega}. \tag{4}$$

若令 $x=e^{i\omega t}$，则绝对加速度响应为

$$\ddot{z}=H_{x\ddot{z}}(\omega)e^{i\omega t}, \tag{5}$$

代入（2）式后，得

$$H_{x\ddot{z}}(\omega)=\frac{k+i\omega r}{(m-k/\omega^2)-ir/\omega}. \tag{6}$$

（b）设单位位移激励 $x=e^{i\omega t}$，则相对位移响应为

$$y(t)=H_{xy}(\omega)e^{i\omega t}, \tag{7}$$

将（7）式代入（1）式，得

$$H_{xy}(\omega)=\frac{m\omega^2}{k-m\omega^2+i\omega r}. \tag{8}$$

又设 $x=e^{i\omega t}$，则相对速度响应为

$$\dot{y}(t)=H_{x\dot{y}}(\omega)\cdot e^{i\omega t}, \tag{9}$$

代入（1）式后，得位移激励对相对速度响应的频率响应函数为

$$H_{x\dot{y}}(\omega)=\frac{m\omega^2}{r+i(m\omega-k/\omega)}. \tag{10}$$

讨论：（1）激励可以有各种形式，响应也可以有各种形式，故有各种频率响应函数。应用时要分清频率响应函数所对应的激励和响应分别是什么。

（2）用频率响应函数分析质量 m 的运动十分方便：

当 $\omega=0$ 时，$H_{xy}(\omega)=0$，$H_{xz}(\omega)=1$，即质量 m 和无质量小车同步运动；且 $H_{x\dot{y}}(\omega)=0$，$H_{x\ddot{z}}(\omega)=0$，即相对速度和绝

对加速度为零。当 $\omega\to\infty$ 时，$H_{xy}(\omega)=-1$，$H_{xz}(\omega)=0$，即质量 m 相对地面保持不动。

例题 5-5 测量飞机升降舵控制片的扭转刚度 k_t 和固有频率的实验装置如例题图 5-5-1 所示。已知控制片绕铰链 O 的转动惯量为 J_0，两激振弹簧刚度分别为 k_1、k_2，在弹簧 k_2 的端点 A 受位移激励 $x(t)=B\sin\omega t$，求此系统对于转角响应 $\theta(t)$ 的频率响应函数。

解：(1) 以机翼控制升降舵为研究对象，分析力。并设平衡时，控制升降舵与水平线夹角为 θ_0，此时控制升降舵的弦长为 $L/\cos\theta_0$。

(2) 应用动量矩定理，得机翼控制升降舵角振动的微分方程

$$J_0\ddot{\theta}=L\left[k_2\left(x-\frac{L}{\cos\theta_0}\theta\right)-k_1\frac{L}{\cos\theta_0}\cdot\theta\right]-k_t\theta,$$

或

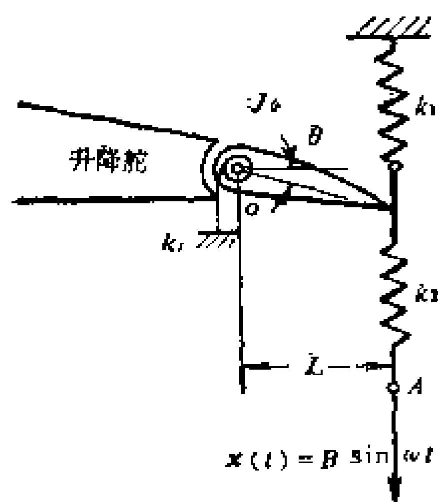
$$J_0\ddot{\theta}/L+\left[\frac{L(k_1+k_2)}{\cos\theta_0}+k_t\right]\theta=k_2x(t). \tag{1}$$

(3) 求频率响应函数

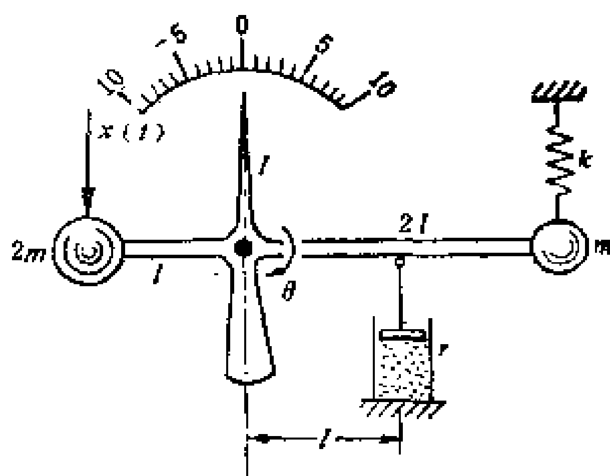
设正弦激励

$$x=x_0e^{i\omega t}, \tag{2}$$

则响应为



例题图 5-5-1



例题图 5-6-1

$$\theta(t)=H_{x\theta}(\omega)x_0e^{i\omega t}. \tag{3}$$

将（2）、（3）式代入（1）式，得

$$H_{x\theta}(\omega)=k_2\Big/\left[k_t+\frac{L(k_1+k_2)}{\cos\theta_0}-\frac{J_0\omega^2}{L}\right]. \tag{4}$$

讨论：（1）激励也可以设为单位正弦激励，即令 $x_0=1$。

（2）k_t 的量纲与 k_1 或 k_2 不同。

（3）（4）式是实函数，因为此系统没有计及阻尼，即位移激励对应的位移响应无相位差，所以不会有滞后。

（4）（4）式可用来检验控制升降舵会否因飞机发动机或空气湍流的激励引起超过许可的动态响应。当

$$\omega=\sqrt{\frac{L}{J_0}\left[k_t+\frac{L(k_1+k_2)}{\cos\theta_0}\right]}$$

时，$H_{x\theta}(\omega)$ 等于∞，将出现危险的共振。

例题 5-6 例题图 5-6-1 所示系统，激励力 $x(t)$ 作用在摆杆左端，响应是摆杆的角位移 $\theta(t)$，若系统简化的当量质量为在摆杆两端的 2 m 和 m，求此系统的脉冲响应函数。

解：（1）取摆杆为研究对象，假设此杆为刚杆，则系统为单自由度的。用广义坐标 $\theta(t)$ 表示某瞬时摆杆的位置，并分析力及运动。

（2）应用拉格朗日方程建立系统的振动方程：

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m[2(l\dot{\theta})^2+2(l\dot{\theta})^2]=3\,ml^2\dot{\theta}^2, \tag{1}$$

系统的势能

$$U=\frac{1}{2}k(2\,l\theta)^2-x(t)l\theta=2\,kl^2\theta^2-lx\theta, \tag{2}$$

阻尼力 $-rl\dot{\theta}$，对应于广义坐标 θ 的广义力

$$\theta_\theta^*=-rl^2\dot{\theta}, \tag{3}$$

将以上各项代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{\partial U}{\partial \theta}=\theta^{*}_{\theta}, \tag{4}$$

得

$$6\,ml^2\ddot{\theta}+4\,kl^2\theta-lx=-rl^2\dot{\theta}.$$

经整理后，得系统振动的微分方程为

$$6\,ml\ddot{\theta}+rl\,\dot{\theta}+4\,kl\theta=x(t). \tag{5}$$

(3) 用脉冲法求系统的动态特性

设激励 $x(t)=\delta(t)$，则响应 $\theta(t)$ 就是脉冲响应函数 $h(t)$，代入 (5) 式得

$$6\,ml\ddot{h}+rl\dot{h}+4\,klh=\delta(t). \tag{6}$$

对 (6) 式在零初始条件下进行拉普拉斯变换，得

$$(6\,mls^2+rls+4\,kl)H(s)=1,$$

∴

$$H(s)=\frac{1}{6\,mls^2+rls+4\,kl}. \tag{7}$$

脉冲响应函数为 (7) 式的逆拉普拉斯变换，即

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{6\,ml}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{r}{12\,m}\right)^2+\frac{4\,k}{6\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{6\,ml}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4\,k}{6\,m}-\left(\frac{r}{12m}\right)^2}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{4\,k}{6\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}}{\left(s+\frac{r}{12\,m}\right)^2+\frac{4\,k}{6\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{e^{-\frac{r}{12\,m}t}}{6\,ml\sqrt{\frac{2\,k}{3\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}}\sin\sqrt{\frac{2\,k}{3\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}\,t\quad(t\geqslant 0). \tag{8}$$

讨论：(1) 临界阻尼可从 $\sqrt{\frac{2\,k}{3\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}=0$ 求得，即

$$r_{cr}=12\,m\sqrt{\frac{2\,k}{3\,m}}=4\sqrt{6\,mk}\,.$$

(2) 当 $0<r<r_{cr}$ 时，系统作衰减振动；

当 $r>r_{cr}$ 时，系统不发生振动；

当 $r=0$ 时，系统作简谐振动，振幅不衰减。

(3) 系统振动的衰减快慢，完全取决于因子$\frac{r}{12\,m}$，即质量越大（惯性越大），阻尼越小，衰减越慢；反之衰减就越快。

(4) 衰减振动的周期

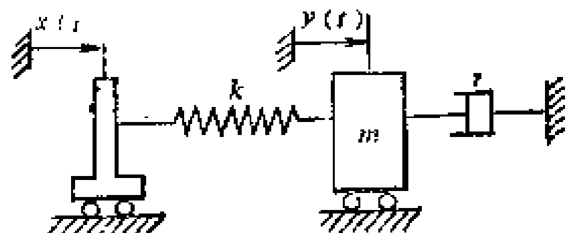
$$T=\frac{2\,\pi}{\sqrt{\frac{2\,k}{3\,m}-\left(\frac{r}{12\,m}\right)^2}}\,.$$

例题 5-7 例题图 5-7-1 所示单自由度振动系统受到基础位移 $x(t)$ 的激励，线性弹簧和阻尼器的常数分别为 k 和 r。

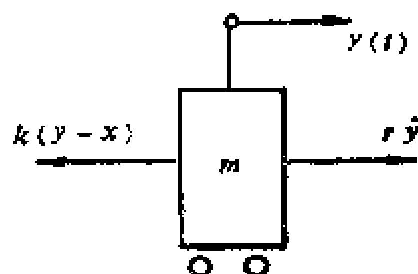
(a) 求弹簧力的脉冲响应函数，并用图表示。

(b) 求弹簧力的频率响应函数，并用图表示，

(c) 验证以上两个函数为付里叶变换对。



例题图 5-7-1



例题图 5-7-2

解：(1) 选质量 m 为研究对象，分析力及运动，见例题图 5-7-2 所示。

(2) 应用牛顿定律，得质量 m 的运动微分方程为

$$m\ddot{y}+r\dot{y}+k(y-x)=0, \tag{1}$$

或

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_0\dot{y}+\omega_0^2 y=\omega_0^2 x\,, \tag{2}$$

式中 $\zeta=\dfrac{r}{2m\omega_0}$为阻尼比， $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$为固有圆频率。

(3) 求响应为弹簧力 $f_s(t)=k\left[y(t)-x(t)\right]$ 时的脉冲响应函数，可先求位移响应 $y(t)$ 的脉冲响应函数 $h(t)$。令 (2) 式中 $x(t)=\delta(t)$，此时 $y(t)$ 就是 $h(t)$，即有

$$\ddot{h}+2\zeta\omega_0\dot{h}+\omega_0^2 h=\omega_0^2\delta(t)\,, \tag{3}$$

当 $t>0$ 时，$\delta(t)=0$，故有

$$\ddot{h}+2\zeta\omega_0\dot{h}-\omega_0^2=0\,, \tag{4}$$

(4) 式的解是

$$h=e^{-\zeta\omega_0 t}(c_1\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t+c_2\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t)\,, \tag{5}$$

得出 (5) 式的条件是 $\zeta<1$。

为了确定 (5) 式中的常数 c_1 和 c_2，在 (3) 式两边都乘 dt，并在 0_-—0_+ 上积分，得

$$\int_{0_-}^{0_+}\ddot{h}(t)dt+2\zeta\omega_0\int_{0_-}^{0_+}\dot{h}(t)dt+\omega_0^2\int_{0_-}^{0_+}h(t)dt$$
$$=\omega_0^2\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt. \tag{6}$$

根据 δ 函数的性质，

$$\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=1\,, \tag{7}$$

由于质量 m 具有惯性。当 $t=0$ 时，$h(t)$ 和 $\dot{h}(t)$ 都是有限值，而不是无穷大。故在积分上下限分别趋于零时，下列两积分值为零：

$$\int_{0_-}^{0_+}h(t)dt=0\,, \tag{8}$$

$$\int_{0_-}^{0_+}\dot{h}(t)dt=h(t=0_+)=0\,, \tag{9}$$

于是 (6) 式简化为

$$\int_{0_-}^{0_+} \ddot{h}(t)dt = \dot{h}(t=0_+) = \omega_0^2. \tag{10}$$

由初始条件（9）、（10）式，确定

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{11}$$

从而得

$$h_{xy}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t & (t \geqslant 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases} \tag{12}$$

（a）弹簧力 $f_s(t)$ 的脉冲响应函数为：

$$h_{xf}(t) = \begin{cases} k\left[\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t - \delta(t)\right] & (t \geqslant 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases} \tag{13}$$

（b）求 $f_s(t)$的频率响应函数

先求 $y(t)$的频率响应函数 $H_{xy}(\omega)$。令 $x(t) = e^{i\omega t}$， $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$，代入(2)式，求得

$$H_{xy}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}, \tag{14}$$

于是，$f_s(t)$的频率响应函数为

$$H_{xf}(\omega) = k\left[\frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2} - 1\right]. \tag{15}$$

（c）将(13)式 $h_{xf}(t)$作付里叶变换

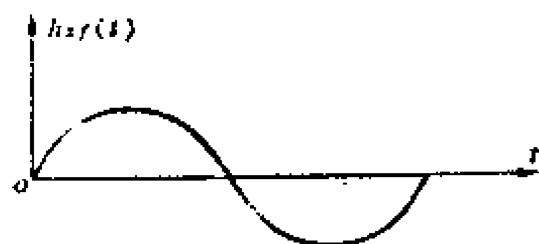
$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{xf}(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} k\left[\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t - \delta(t)\right] \cdot e^{-i\omega t} dt$$

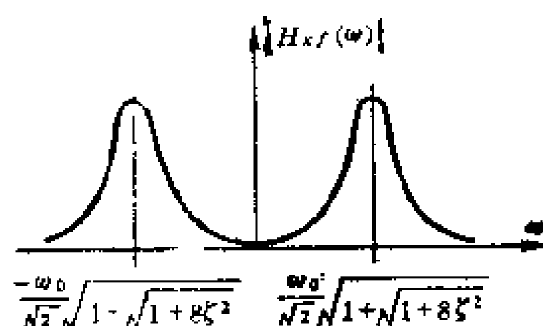
$$= \frac{k\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^{\infty} e^{-\xi\omega_0 t} e^{-i\omega t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t dt - k$$

$$= k\left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2+2\zeta\omega_0 i\omega+\omega_0^2}-1\right]=H_{xf}(\omega).$$

$h_{xf}(t)$ 对 t 和 $|H_{xf}(\omega)|$ 对 ω 曲线分别如例题图 5-7-3 和例题图 5-7-4 所示。



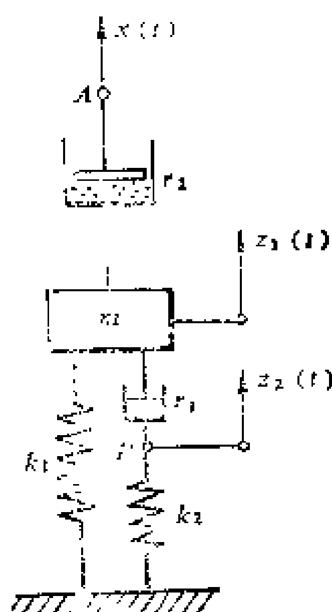
例题图 5-7-3



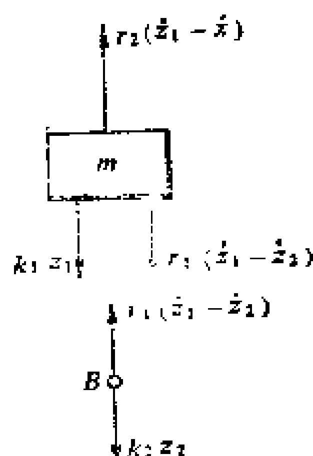
例题图 5-7-4

讨论：响应的含义是很广的，它可以是力、应力、加速度、加加速度、光洁度、灵敏度、稳定度、电流、电压及其它要研究的参数

例题 5-8 例题图 5-8-1 所示系统由两个阻尼器 r_1 和 r_2、两个弹簧 k_1 和 k_2 以及质量 m 组成。在 A 点受位移激励 $x(t)$，求质量 m 的绝对位移响应 $z_1(t)$ 的频率响应函数。



例题图 5-8-1



例题图 5-8-2

解：(1) 选质量m及B点为研究对象，分析力及分析运动。见例题图 5-8-2。

(2) 应用牛顿定律，得系统的振动微分方程

$$m\ddot{z}_1(t) = -k_1 z_1 - r_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - r_2(\dot{z}_1 - \dot{x}), \tag{1}$$

$$-k_2 z_2 + r_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0. \tag{2}$$

经整理后为

$$m\ddot{z}_1 + (r_1 + r_2)\dot{z}_1 + k_1 z_1 - r_1\dot{z}_2 = r_2\dot{x}, \tag{3}$$

$$r_1\dot{z}_1 - r_1\dot{z}_2 - k_2 z_2 = 0. \tag{4}$$

(3) 求系统的频率响应函数

设$x = e^{i\omega t}$，则$z_1(t) = H_{xz_1}(\omega)\ e^{i\omega t}$，代入解联立方程组得

$$H_{xz_1}(\omega) = \frac{r_2}{\left(k_1 - m\omega^2 + \dfrac{k_2 r_1^2\omega^2}{k_2^2 + r_1^2\omega^2}\right) + i\omega\left(r_2 + \dfrac{k_2^2 r_1}{k_2^2 + r_1^2\omega^2}\right)}. \tag{5}$$

讨论：(1) 此例k_1、r_1和k_2部分组成的系统是经典的粘弹性材料模型，质量相当于放在粘弹性材料上进行隔振

(2) 在求解(3)式时，可同时得到位移响应z_2的频率响应函数

$$H_{xz_2}(\omega) = \frac{r_1 r_2\omega^2}{\left[\left(k_1 - m\omega^2 + \dfrac{k_2 r_1^2\omega^2}{k_2^2 + r_1^2\omega^2}\right) + i\omega\left(r_2 + \dfrac{k_2^2 r_1}{k_2^2 + r_1^2\omega^2}\right)\right](k_2 + i\omega r_1)}.$$

例题 5-9 例题图 5-9-1 所示振动系统，$x(t)$是力输入，响应是L形杆的转角$\theta(t)$。已知在初瞬时，系统处于静止状态，求系统的脉冲响应函数。

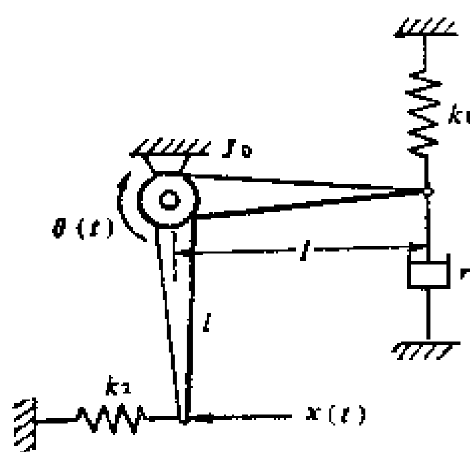
解：(1) 分析L型杆的受力和运动，输入为$x(t)$，响应为$\theta(t)$。

(2) 求系统微振动的微分方程

应用动量矩定理得

$$J_0\ddot{\theta} = -k_2 l^2\theta - k_1 l^2\theta - r l^2\dot{\theta} + x(t)\cdot l,$$

经整理后为



例题图 5-9-1

$$\ddot{\theta}+\frac{rl^2}{J_0}\dot{\theta}+\frac{l^2}{J_0}(k_1+k_2)\theta$$

$$=x(t)\frac{l}{J_0}. \tag{1}$$

令 $a=\frac{rl^2}{J_0}$, $b=\frac{l^2}{J_0}(k_1+k_2)$,

$c=\frac{l}{J_0}$,

得

$$\ddot{\theta}+a\dot{\theta}+b\theta=x(t)\cdot c. \tag{2}$$

(3) 求脉冲响应函数

设力激励为脉冲函数，即

$$x(t)=\delta(t)=\begin{cases}0 & (t\neq0),\\ \infty & (t=0).\end{cases}$$

首先从 $t>0$ 时，$\delta(t)=0$，有方程

$$\ddot{\theta}+a\dot{\theta}+b\theta=0,$$

$$\therefore\quad \theta(t)=e^{-\frac{a}{2}t}\left(c_1e^{-\sqrt{(\frac{a}{2})^2-b}\,t}+c_2e^{\sqrt{(\frac{a}{2})^2-b}\,t}\right). \tag{3}$$

对(2) 式积分

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\ddot{\theta}\,dt+a\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dot{\theta}\,dt+b\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\theta dt=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}c\delta(t)dt. \tag{4}$$

$\varepsilon\to0$ 时，

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dot{\theta}dt=\theta_{0+}-0=0,$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\theta dt=0,$$

$$c\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=c,$$

$$\therefore\quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\ddot{\theta}dt=\dot{\theta}_{0+}-\dot{\theta}_{0-}=\dot{\theta}_{0+}-0=\dot{\theta}_{0+}.$$

将以上计算结果代入(4)式，得 $\dot{\theta}(0)=c$，连同 $\theta(0)=0$ 代入到

(3) 式中，得积分常数

$$c_1=-c/2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b},$$

$$c_2=c/2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}.$$

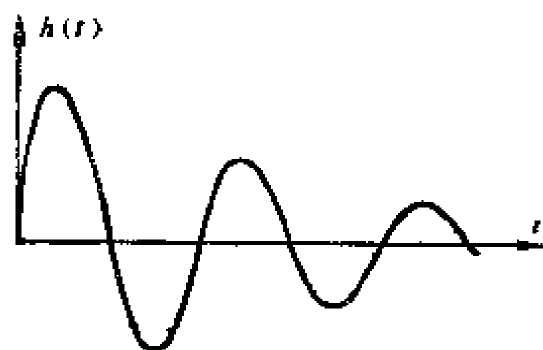
所以系统的脉冲响应函数为

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\frac{a}{2}t}\left(e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\,t}+e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\,t}\right) & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases} \tag{5}$$

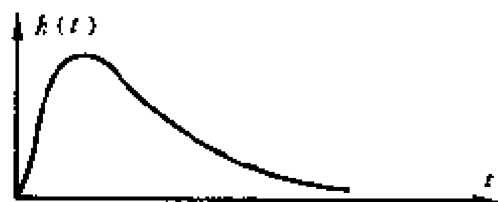
讨论：(1) 当$\left(\frac{a}{2}\right)^2<b$，即$\frac{r^2l^2}{4J_0}\leqslant(k_1+k_2)$时

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{2i\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}e^{-\frac{a}{2}t}\left(-e^{-i\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\,t}+e^{i\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\,t}\right)\\ \quad=\dfrac{c}{\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}e^{-\frac{a}{2}t}\sin\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\,t & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

此时系统的脉冲响应是衰减曲线，见例题图 5-9-2。



例题图 5-9-2



例题图 5-9-3

(2) 当$\left(\frac{a}{2}\right)^2>b$，即$\frac{r^2l^2}{4J_0}>k_1+k_2$时，脉冲响应不具有振动的性质，见例题图 5-9-3。

(3) 对 $h(t)$求极值，即令 $\dot{h}(t)=0$。记$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}=p$，得

$$-\frac{a}{2}\ e^{-\frac{a}{2}t}(-e^{-pt}+e^{pt})+e^{-\frac{a}{2}t}(pe^{-pt}+pe^{pt})=0,$$

或

$$\left(p+\frac{a}{2}\right)+\left(p-\frac{a}{2}\right)e^{2pt}=0.$$

$$\therefore \qquad e^{2pt}=\frac{p+\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}-p}=\frac{a+2p}{a-2p},$$

$$2pt=\ln\left(\frac{a+2p}{a-2p}\right),$$

由上式解得

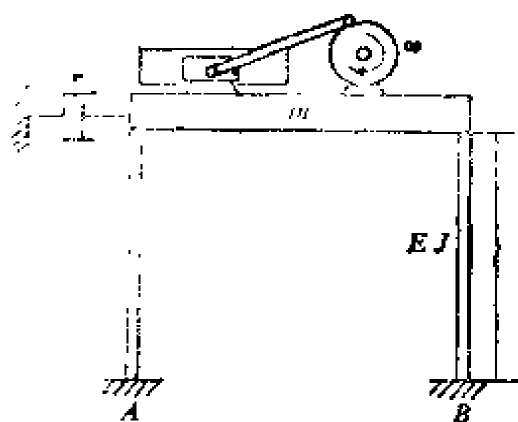
$$t=\frac{1}{p}\ln\sqrt{\frac{a+2p}{a-2p}}.$$

则

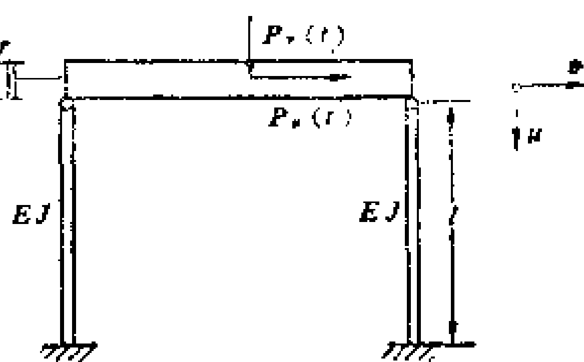
$$h(t)_{\max}=\frac{c}{2p}\exp\left[-\frac{p}{2}\ln\sqrt{\frac{a+2p}{a-2p}}\right]\cdot\left[-\sqrt{\frac{a-2p}{a+2p}}+\sqrt{\frac{a+2p}{a-2p}}\right].\tag{6}$$

欲使L形杆的转角响应迅速趋于零，一般取不具有振动性质的设计，且参数 a，b 应使得(6) 式的值尽可能小。

例题 5-10 例题图 5-10-1 所示厂房楼板上安装了往复式发动机，楼板由两根弹性梁支承，楼板总质量为m，其它参数如图。求表示系统动态特性的脉冲响应函数和频率响应函数（假设梁的质量与楼板相比可略去不计）。



例题图 5-10-1



例题图 5-10-2

解：(1) 将实际问题简化为例题图 5-10-2 所示的平面结构，则系统是两自由度的。选取楼板质心的水平位移 u（向右为正）和竖直位移 v（向下为正）为广义坐标，发动机的激励可分为水平和竖直两部分：即 $P_u(t)$ 和 $P_v(t)$。

(1) 求系统微振动方程

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{u}^2+\dot{v}^2),$$

系统的势能

$$U=2\cdot\frac{1}{2}\frac{3EJ}{l^3}u^2-P_u(t)\cdot u-P_v(t)\cdot v+2\cdot\frac{1}{2}\frac{EF}{l}v^2,$$

式中 F 为杆的横截面积。

广义力

$$Q_u^*=-r\dot{u},$$

$$Q_v^*=0.$$

将以上各式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}=Q_j^*, \tag{1}$$

(1)式中的 $q_1=u$，$q_2=v$，则系统微振动的微分方程组为

$$
\begin{cases}
m\ddot{u}+r\dot{u}+\dfrac{6EJ}{l^3}u=P_u(t), \\
\dfrac{2EFv}{l}+m\ddot{v}=P_v(t).
\end{cases} \tag{2}
$$

以上两式彼此独立，这是因为各式中都没有耦合项，因而可以分别求解。

(3) 求脉冲响应函数

分别设

$$
\begin{cases}
P_u(t)=\delta(t), \\
P_v(t)=\delta(t).
\end{cases} \tag{3}
$$

将(3)代入(2)式，分别对(2)的两式进行拉普拉斯变换，在零初始条件下，得

$$
H_{P_u u}(s)=\frac{1}{ms^2+rs+\dfrac{6EJ}{l^3}} \tag{4}
$$

和

$$
H_{P_v v}(s)=\frac{1}{ms^2+\dfrac{2EF}{l}}. \tag{5}
$$

对(4)式求逆拉普拉斯变换，得

$$
h_{P_u u}(t)=\mathscr{L}^{-1}[H_{P_u u}(s)]
$$

$$
=\frac{1}{m}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\dfrac{r}{2m}\right)^2+\dfrac{6EJ}{ml^3}-\left(\dfrac{r}{2m}\right)^2}\right]\right\}
$$

$$
=\frac{e^{-\frac{r}{2m}t}}{m\sqrt{\dfrac{6EJ}{ml^3}-\left(\dfrac{r}{2m}\right)^2}}\sin\sqrt{\frac{6EJ}{ml^3}-\left(\frac{r}{2m}\right)^2}\,t \quad (t\geqslant 0). \tag{6}
$$

易得临界阻尼

$$r_{cr}=2m\sqrt{\frac{6EJ}{ml^3}}=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{6mEJ}{l}}.$$

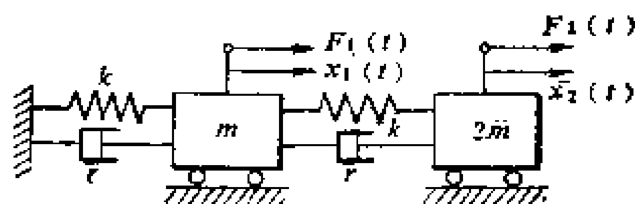
对(5)式求逆拉普拉斯变换

$$\begin{aligned}h_{P_y v}(t)&=\mathscr{L}^{-1}[H_{P_y v}(s)]\\&=\frac{1}{m}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\frac{2EF}{ml}}\right]\right\}\\&=\sqrt{\frac{l}{2EFm}}\sin\sqrt{\frac{2EF}{ml}}\cdot t\quad(t\geqslant0).\qquad(7)\end{aligned}$$

讨论：(1) 对于较复杂的多自由度系统，用拉格朗日方程和拉普拉斯变换求解脉冲响应函数和频率响应函数较为方便。

(2) 由(7)式可见，阻尼器对 $h_{P_y v}(t)$ 并不起衰减作用，因此楼板在竖直方向的振动较为严重。工作人员感受到的也主要是这种振动，人在振动环境里承受的时间可查看附录。

(3) 为了减小 $h_{P_y v}(t)$ 值，除了增加楼板质量，提高弹性梁的 EF 值等措施外，还可以将合适的减振器安装在发动机底座下.



例题图 5-11-1

例题 5-11 考虑例题图 5-11-1 所示的微振动系统，导出其运动方程。令 $r=0.02\sqrt{km}$，注意到模态矩阵使运动方程去耦，求脉冲响应矩阵的各元素。

解：这是一个两自由度系统受两输入的振动问题，分别选质量 m 和 $2m$ 为研究对象，分析力和运动，应用牛顿定律得系统的振动微分方程为

$$\left.\begin{aligned}&2m\ddot{x}_2+r(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k(x_2-x_1)=F_2(t);\\&m\ddot{x}_1+r\dot{x}_1+kx_1-r(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k(x_2-x_1)=F_1(t).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + 2\xi\omega_0\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

用简洁形式为

$$\bar{M}\ddot{\bar{X}} + 2\xi\omega_0\bar{r}_0\dot{\bar{X}} + \omega_0^2\bar{K}_0\bar{X} = \bar{F}/m, \tag{3}$$

式中

$$\xi = r/2\omega_0 m = 0.01,\ \omega_0 = \sqrt{k/m},$$

$$\bar{r}_0 = \bar{K}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

系统的特征矩阵

$$\bar{A} = \bar{M}^{-1}\bar{K} = \omega_0^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \omega_0^2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

解出特征方程

$$|A - \lambda^2 I| = 0, \tag{5}$$

得特征根

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{17})\omega_0^2 = 0.219\,\omega_0^2, \\ \lambda_2^2 = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{17})\omega_0^2 = 2.281\,\omega_0^2. \end{cases} \tag{6}$$

所以有模态矩阵

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4}(3+\sqrt{17}) & \frac{1}{4}(3-\sqrt{17}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.781 & -0.281 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

令 $X = \bar{\Phi}\bar{Y}$，同时用 Φ^T 左乘（3）式两边，得

$$\bar{\Phi}^T\bar{M}\bar{\Phi}\ddot{\bar{Y}} + 2\xi\omega_0\bar{\Phi}^T\bar{r}_0\bar{\Phi}\dot{\bar{Y}} + \omega_0^2\bar{\Phi}^T\bar{K}_0\bar{\Phi} = \bar{\Phi}^T\bar{F}/m. \tag{8}$$

可以算出

$$\bar{\Phi}^T\bar{M}\bar{\Phi}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{(3+\sqrt{17})^2}{8} & 0\\ 0 & 1+\dfrac{(3-\sqrt{17})^2}{8}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7.342 & 0\\ 0 & 1.158\end{bmatrix}; \tag{9}$$

$$\bar{\Phi}^T\bar{K}_0\bar{\Phi}=\bar{\Phi}^T\bar{r}_0\bar{\Phi}=\bar{\Phi}^T\bar{M}\bar{\Phi}\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\omega_0^2}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1^2\left[1+\dfrac{(3+\sqrt{17})^2}{8}\right] & 0\\ 0 & \lambda_2^2\left[1+\dfrac{(3-\sqrt{17})^2}{8}\right]\end{bmatrix}\frac{1}{\omega_0^2}$$

$$=\begin{bmatrix}1.610 & 0\\ 0 & 2.640\end{bmatrix}; \tag{10}$$

$$\frac{1}{m}\bar{\Phi}^T\bar{F}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_1+\dfrac{1}{4}(3+\sqrt{17})F_2\\ F_2+\dfrac{1}{4}(3-\sqrt{17})F_2\end{bmatrix}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_1+1.78F_2\\ F_1-0.281F_2\end{bmatrix}. \tag{11}$$

把以上各式代入(8)式，得

$$\begin{bmatrix}7.342 & 0\\ 0 & 1.158\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}+2\zeta\omega_0\begin{bmatrix}1.610 & 0\\ 0 & 2.640\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}+$$

$$+\omega_0^2\begin{bmatrix}1.610 & 0\\ 0 & 2.640\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{m}\begin{Bmatrix}F_1+1.781F_2\\ F_1-0.281F_2\end{Bmatrix}. \tag{12}$$

取 $F_1=\delta(t)$，$F_2=0$，得

$$h'_{11}(t)=\frac{1}{7.342\,m\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_1}{\omega_0}\right)^2}\lambda_1}e^{-\frac{\zeta}{\omega_0}\lambda_1^2t}\sin\lambda_1\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_1}{\omega_0}\right)^2}\,t$$

$$=\frac{0.291}{\sqrt{km}}e^{-0.00219\omega_0t}\sin(0.468\,\omega_0t)\qquad(t\geqslant0)；\tag{13}$$

$$h'_{12}(t)=\frac{1}{1.158\,m\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_2}{\omega_0}\right)^2}\lambda_2}e^{-\frac{\zeta}{\omega_0}\lambda_2^2t}\sin\lambda_2\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_2}{\omega_0}\right)^2}\,t$$

$$=\frac{0.572}{\sqrt{km}}e^{-0.02281\omega_0t}\sin(1.510\,\omega_0t)\qquad(t\geqslant0).\tag{14}$$

取 $F_1=0$，$F_2=\delta(t)$，可以得出：

$$\begin{cases}h'_{21}(t)=1.781\,h'_{11}(t)\\ h'_{22}(t)=-0.281\,h'_{12}(t).\end{cases}\tag{15}$$

最后，由 $\overline{X}=\overline{\Phi}\,\overline{Y}$，得

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}y_1+y_2\\ 1.781\,y_1-0.281\,y_2\end{Bmatrix},\tag{16}$$

得脉冲响应函数

$$h_{11}(t)=h'_{11}(t)+h'_{12}(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\Big\{0.291\,e^{-0.00219\omega_0t}\cdot$$

$$\sin(0.468\,\omega_0t)+0.572\,e^{-0.02281\omega_0t}\sin(1.510\,\omega_0t)\Big\}\quad(t\geqslant0),\tag{17}$$

$$h_{12}(t)=h'_{21}(t)=h'_{21}(t)+h'_{22}(t)$$

$$=\frac{1}{k\omega_0}\Big\{0.518\,e^{-0.00219\omega_0 t}\sin(0.468\,\omega_0 t)-$$

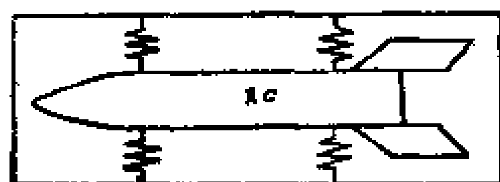
$$-0.181\,e^{-0.02281\omega_0 t}\sin(1.510\,\omega_0 t)\Big\}\quad(t\geq 0),\tag{18}$$

$$h_{22}(t)=1.781\,h'_{21}(t)-0.281\,h'_{22}(t)$$

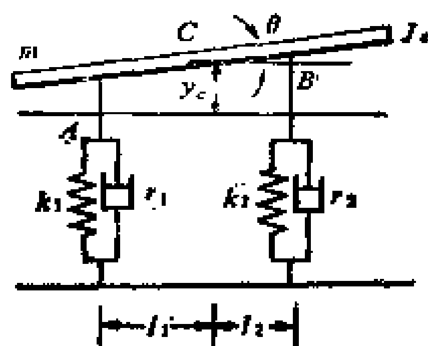
$$=\frac{1}{k\omega_0}\Big\{0.923\,e^{-0.00219\omega_0 t}\sin(0.468\,\omega_0 t)+$$

$$+0.0152\,e^{-0.02281\omega_0 t}\sin(1.510\,\omega_0 t)\Big\}\quad(t\geq 0).\tag{19}$$

例题 5-12 小型导弹的包装箱如例题图 5-12-1 所示，导弹包装系统可以简化为例题图 5-12-2 所示的两自由度振动系统。当箱外壳在搬运过程中受到冲击 $\ddot{x}_1(t)$，$\ddot{x}_2(t)$ 后，弹体质心的位移和转角加速度响应 $\ddot{y}$，$\ddot{\theta}$ 应在许可范围之内。求此系统的频率响应矩阵。



例题图 5-12-1



例题图 5-12-2

解：这是一个受基础冲击激励的两自由度系统的振动问题。冲击载荷一般以加速度形式激励，用 $\ddot{x}_1(t)$和 $\ddot{x}_2(t)$ 表示，于是构成一个两输入两输出系统。系统的动态特性用频率响应矩阵形式表示，即

$$\overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix} H_{\ddot{x}_1\ddot{y}}(\omega) & H_{\ddot{x}_1\ddot{\theta}}(\omega) \\ H_{\ddot{x}_2\ddot{y}}(\omega) & H_{\ddot{x}_2\ddot{\theta}}(\omega) \end{bmatrix}.$$

这里广义坐标为重心 C 的垂直位移 y 和绕重心的转角 θ，取 y

向上为正，θ 逆时针为正，$x_1(t)$，$x_2(t)$ 也均以向上为正，则 A，B 点的垂直位移分别为

$$\begin{cases} y_1 = y - l_1\theta, \\ y_2 = y + l_2\theta. \end{cases}$$

系统的动能

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2,$$

系统的势能

$$U = \frac{1}{2}k_1(y_1 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - x_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 - k_1y_1x_1 - k_2y_2x_2$$

$$= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)y^2 + (k_2l_2 - k_1l_1)y\theta +$$

$$+ \frac{1}{2}(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta^2 - (k_1x_1 + k_2x_2)y +$$

$$+ (k_1x_1l_1 - k_2x_2l_2)\theta + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2,$$

系统的耗散能

$$D = \frac{1}{2}r_1(\dot{y}_1 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}r_2(\dot{y}_2 - \dot{x}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\dot{y}^2 + (r_2l_2 - r_1l_1)\dot{y}\dot{\theta} + \frac{1}{2}(r_1l_1^2 +$$

$$+ r_2l_2^2)\dot{\theta}^2 - (r_1\dot{x}_1 + r_2\dot{x}_2)\dot{y} + (r_1\dot{x}_1l_1 - r_2\dot{x}_2l_2)\dot{\theta} +$$

$$+ \frac{1}{2}r_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}r_2\dot{x}_2^2.$$

将 T，U，D 值代入非保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2,\ q_1 = y,\ q_2 = \theta).$$

得振动的微分方程组：

$$
\begin{cases}
m\ddot{y}+(r_1+r_2)\dot{y}+(r_2l_2-r_1l_1)\dot{\theta}+(k_1+k_2)y+(k_2l_2-k_1l_1)\theta \\
\qquad =r_1\dot{x}_1+r_2\dot{x}_2+k_1x_1+k_2x_2; & (1)\\
J_c\ddot{\theta}+(r_1l_1^2+r_2l_2^2)\dot{\theta}+(r_2l_2-r_1l_1)\dot{y}+(k_1l_1^2+k_2l_2^2)\theta+ \\
\qquad +(k_2l_2-k_1l_1)y=k_2l_2x_2-k_1l_1x_1+r_2l_2\dot{x}_2-r_1l_1\dot{x}_1. & (2)
\end{cases}
$$

逐个求频率响应函数。

先设 $x_1=e^{i\omega t}$, $x_2=0$,

则 $\qquad y=H_{x_1y}(\omega)e^{i\omega t}$, $\theta=H_{x_1\theta}(\omega)e^{i\omega t}$,

代入（1）及（2）式，得

$$
[(k_1+k_2)-m\omega^2+i\omega(r_1+r_2)]H_{x_1y}(\omega)+[(k_2l_2-k_1l_1)+
+i\omega(r_2l_2-r_1l_1)]\cdot H_{x_1\theta}(\omega)=(i\omega r_1+k_1); \tag{3}
$$

及

$$
[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)]H_{x_1y}(\omega)+
+[(k_1l_1^2+k_2l_2^2)-J_c\omega^2+i\omega(r_1l_1^2+r_2l_2^2)]H_{x_1\theta}(\omega)
=-i\omega r_1l_1-k_1l_1. \tag{4}
$$

由（3）、（4）式求得

$$
H_{x_1y}(\omega)=\frac{(i\omega r_1+k_1)[(k_1l_1^2+k_2l_2^2)-J_c\omega^2+i\omega(r_1l_1^2+r_2l_2^2)]}{\Delta_1}+
+\frac{(i\omega r_1l_1+k_1l_1)[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)]}{\Delta_1}; \tag{5}
$$

$$
H_{x_1\theta}(\omega)=\frac{-[(k_1+k_2)-m\omega^2+i\omega(r_1+r_2)](i\omega r_1l_1+k_1l_1)}{\Delta_1}-
-\frac{[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)](i\omega r_1+k_1)}{\Delta_1}, \tag{6}
$$

上两式中的 Δ_1 表示为

$$
\Delta_1=[(k_1+k_2)-m\omega^2+i\omega(r_1+r_2)][(k_1l_1^2+k_2l_2^2)-J_c\omega^2+
+i\omega(r_1l_1^2+r_2l_2^2)]-[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)][(k_2l_2-
-k_1l_1)+i\omega(r_2l_2-r_1l_1)]. \tag{7}
$$

再设 $\quad x_2=e^{i\omega t}$, $x_1=0$,

则 $\qquad y=H_{x_2y}(\omega)e^{i\omega t}$, $\theta=H_{x_2\theta}(\omega)e^{i\omega t}$,

代入(1)式得

$$[(k_1+k_2)-m\omega^2+i\omega(r_1+r_2)]H_{x_2y}(\omega)+[(k_2l_2-k_1l_1)+$$
$$+i\omega(r_2l_2-r_1l_1)]H_{x_2\theta}(\omega)=(i\omega r_2+k_2); \tag{8}$$

代入(2)式得

$$[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)]H_{x_2y}(\omega)+[(k_1l_1^2+k_2l_2^2)-$$
$$-J_C\omega^2+i\omega(r_1l_1^2+r_2l_2^2)]H_{x_2\theta}(\omega)=$$
$$=i\omega r_2l_2+k_2l_2. \tag{9}$$

由(8)、(9)式解出

$$H_{x_2y}(\omega)=\frac{(i\omega r_2+k_2)[(k_1l_1^2+k_2l_2^2)-J_C\omega^2+i\omega(r_1l_1^2+r_2l_2^2)]}{\Delta_2}$$
$$-\frac{(i\omega r_2l_2+k_2l_2)[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)]}{\Delta_2},$$

$$H_{x_2\theta}(\omega)=\frac{(i\omega r_2l_2+k_2l_2)[(k_1+k_2)-m\omega^2+i\omega(r_1+r_2)]}{\Delta_2}$$
$$-\frac{(i\omega r_2+k_2)[i\omega(r_2l_2-r_1l_1)+(k_2l_2-k_1l_1)]}{\Delta_2}.$$

式中 $\Delta_2=\Delta_1$。考虑到下列关系：

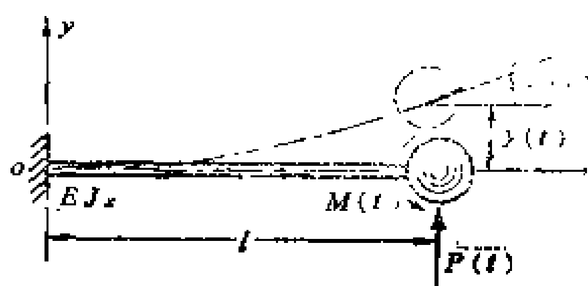
$$H_{x_1y}(\omega)=H_{\ddot{x}_1\ddot{y}}(\omega),$$
$$H_{x_1\theta}(\omega)=H_{\ddot{x}_1\ddot{\theta}}(\omega),$$
$$H_{x_2y}(\omega)=H_{\ddot{x}_2\ddot{y}}(\omega),$$
$$H_{x_2\theta}(\omega)=H_{\ddot{x}_2\ddot{\theta}}(\omega),$$

$$\therefore\quad \overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix}H_{\ddot{x}_1\ddot{y}}(\omega) & H_{\ddot{x}_1\ddot{\theta}}(\omega)\\ H_{\ddot{x}_2\ddot{\theta}}(\omega) & H_{\ddot{x}_2\ddot{y}}(\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{x_1y}(\omega) & H_{x_1\theta}(\omega)\\ H_{x_2y}(\omega) & H_{x_2\theta}(\omega)\end{bmatrix}.$$

讨论：(1) 由各个频率响应函数的各表达式可见，若 $k_1l_1=k_2l_2$，且 $r_1l_1=r_2l_2$，则微分方程(1)和(2)中的耦合项消失。因此在进行包装的减振抗冲设计时，若使重心与刚心和阻尼中心三点重合，则导弹上平动与俯仰振动便不会耦合，这时各频率响应函数也可以大为简化，工程上减振器的选择或进行减振设计将大为方便。

(2) 当 $k_1l_1=k_2l_2$，$r_1l_1=r_2l_2$，且 $x_1(t)=x_2(t)$ 时，导弹将无俯仰运动，仅产生上下平动。

例题 5-13 例题图 5-13-1 所示悬臂梁的自由端上装有一圆盘，圆盘绕盘心的转动惯量为 J_0，其余参数表示在图上，求此振动系统频率响应矩阵之每一元素的表示式。



例题图 5-13-1

解：设此系统不计阻尼，不计梁的质量，只研究盘心 y 方向的位移 $y(t)$ 和盘绕盘心 O 的转角 $\varphi(t)$。又设 $P(t)$ 和 $M(t)$ 分别为作用于悬臂梁自由端处的集中动载荷和集中动力矩。所以，这是一个两自由度无阻尼双输入双输出系统。

(1) 应用材料力学中的影响系数法，得到自由振动的微分方程为

$$\begin{cases} y=\delta_{11}(-m\ddot{y})+\delta_{12}(-J_0\ddot{\varphi}), \\ \varphi=\delta_{21}(-m\ddot{y})+\delta_{22}(-J_0\ddot{\varphi}). \end{cases} \tag{1}$$

式中

$$\delta_{11}=\frac{l^3}{3EJ_x},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{l^2}{2EJ_x},\quad \delta_{22}=\frac{l}{EJ_x}$$

称为**影响系数**。式中 E 为弹性模量，J_x 为轴惯矩，l 为梁长。

方程(1)还可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

式中 $\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$ 称**柔度矩阵**。因为柔度矩阵的逆矩阵称为**刚度矩阵**，因此有

$$[K]=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{21} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{bmatrix}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}}$$

$$
=\begin{bmatrix} \dfrac{12\,EJ}{l^3} & -\dfrac{6\,EJ}{l^2} \\ -\dfrac{6\,EJ}{l^2} & \dfrac{4\,EJ}{l} \end{bmatrix}.
$$

系统受迫振动的微分方程组

$$
\left.\begin{aligned} m_y\ddot{y}(t)+\frac{12\,EJ_x}{l^3}y(t)+\frac{-6\,EJ_x}{l^2}\varphi(t)=P(t), \\ J_0\ddot{\varphi}(t)+\frac{4\,EJ_x}{l}\varphi(t)+\frac{-6\,EJ_x}{l^2}y(t)=M(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

或写成矩阵形式

$$
\begin{bmatrix} m_y & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{12\,EJ_x}{l^3} & \dfrac{-6\,EJ_x}{l^2} \\ \dfrac{-6\,EJ_x}{l^2} & \dfrac{4\,EJ_x}{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{bmatrix}. \tag{4}
$$

简洁式为

$$
\overline{M}\ddot{\overline{Y}}(t)+\overline{K}\,\overline{Y}(t)=\overline{P}(t). \tag{5}
$$

式中 $\overline{M}$ 为质量矩阵 (2×2)，$\overline{K}$ 为刚度矩阵 (2×2)，$\overline{P}(t)$ 为激励力向量 (2×1)，$\overline{Y}(t)$ 为位移响应向量 (2×1)，$\ddot{\overline{Y}}(t)$ 为加速度响应向量 (2×1)。

$$
\overline{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_y & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}, \tag{6}
$$

$$
\overline{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12\,EJ_x/l^3 & -6\,EJ_x/l^2 \\ -6\,EJ_x/l^2 & 4\,EJ_x/l \end{bmatrix}, \tag{7}
$$

$$
\overline{P}(t)=\begin{bmatrix} P_{11}(t) \\ P_{21}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{bmatrix}, \tag{8}
$$

$$
\overline{Y}(t)=\begin{bmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \tag{9}
$$

$$\ddot{\overline{Y}}(t)=\begin{bmatrix}\ddot{y}_{11}(t)\\ \ddot{y}_{21}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{y}(t)\\ \ddot{\varphi}(t)\end{bmatrix}. \tag{10}$$

(2) 求频率响应函数矩阵

对矩阵方程(5)式进行拉普拉斯变换，注意到初始条件为零，得

$$(\overline{M}s^2+\overline{K})\overline{Y}(s)=\overline{P}(s), \tag{11}$$

令 $s=i\omega$，得

$$(-\omega^2\overline{M}+\overline{K})\overline{Y}(\omega)=\overline{P}(\omega), \tag{12}$$

将(12)式两端同时左乘 $(-\omega^2\overline{M}+\overline{K})^{-1}$，得

$$\overline{Y}(\omega)=(-\omega^2\overline{M}+\overline{K})^{-1}\overline{P}(\omega). \tag{13}$$

则频率响应矩阵为

$$\overline{H(\omega)}=(-\omega^2\overline{M}+\overline{K})^{-1}. \tag{14}$$

(14)式是一个 (2×2) 方阵，由于 $\overline{M}$ 及 $\overline{K}$ 是实对称阵，由矩阵性质可知 $H(\omega)$ 也是实对称矩阵，形式为

$$\overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix}H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega)\\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega)\end{bmatrix}. \tag{15}$$

且有 $H_{12}(\omega)=H_{21}(\omega)$。

将 (6)、(7) 式代入(14)式，得

$$\overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix}-\omega^2m_y+\dfrac{12\,EJ_x}{l^3} & \dfrac{-6\,EJ_x}{l^2}\\ \dfrac{-6\,EJ_x}{l^2} & -\omega^2J_0+\dfrac{4\,EJ_x}{l}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-\omega^2J_0+\dfrac{4\,EJ_x}{l} & \dfrac{6\,EJ_x}{l^2}\\ \dfrac{6\,EJ_x}{l^2} & -\omega^2m_y+\dfrac{12\,EJ_x}{l^3}\end{bmatrix}, \tag{16}$$

式中

$$\Delta=\left(-\omega^2m_y+\frac{12\,EJ_x}{l^3}\right)\left(-\omega^2J_0+\frac{4\,EJ_x}{l}\right)-\frac{36\,E^2J_x^2}{l^4}.$$

$P(t)$激起 $y(t)$的频率响应函数为

$$H_{Py}(\omega)=H_{11}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\left(-\omega^2 J_0+\frac{4EJ_x}{l}\right);$$

$P(t)$激起 $\varphi(t)$的频率响应函数为

$$H_{P\varphi}(\omega)=H_{12}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{6EJ_x}{l^2}\right);$$

$M(t)$激起 $y(t)$的频率响应函数

$$H_{My}(\omega)=H_{21}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{6EJ_x}{l^2}\right)=H_{12}(\omega);$$

$M(t)$激起 $\varphi(t)$的频率响应函数

$$H_{M\varphi}(\omega)=H_{22}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\left(-\omega^2 m_y+\frac{12EJ_x}{l^3}\right).$$

讨论：对于多输入多输出的多自由度振动系统，应用矩阵法求频率响应函数，可简化解题过程。

第五章习题

习题 5-1 线性时不变系统的动态特性，工程上常用 $H(\omega)$ 和 $h(t)$描述。在《随机振动概论》一书中提出了哪些用实验方法获得 $H(\omega)$ 和 $h(t)$的理论公式?

习题 5-2 导弹发射架 OA 绕 O 点的转动惯量为 J_0，A 点用刚度为 k，阻尼系数为 r 的构架支撑，$OA=l$。导弹起飞时对发射架的激励力矩为M，若响应为发射架的转角 θ，求系统的脉冲响应函数和频率响应函数。

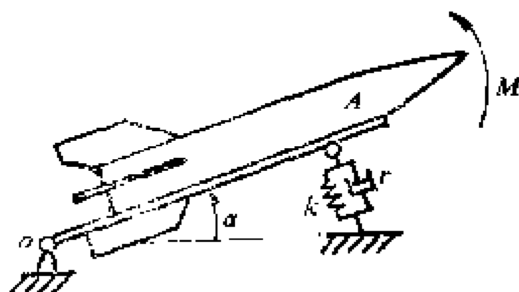
答案：若 $\xi<1$：

$$h_{M\theta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 J_0}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t) & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

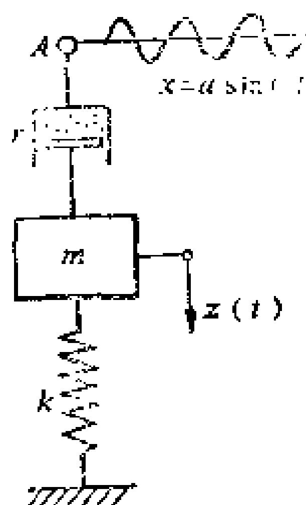
若 $\xi>1$：

$$h_{M\theta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0 J_0}e^{-\xi\omega_0 t}(-e^{-\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0 t}+e^{\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0 t}) & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

式中 $\omega_0=l\sqrt{\dfrac{k}{J_0}}$，$\xi=\dfrac{rl}{2\sqrt{kJ_0}}$.



习题图5-2



习题图 5-3

$$H(\omega)=\frac{1}{J_0\omega_0^2\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)i\right]}.$$

习题 5-3 图示振动系统，上端 A 有一位移激励 $x=a\cdot\sin\omega t$，求：

(a) 对于质量 m 绝对位移 z 的频率响应函数。

(b) 若令 $\zeta=\frac{r}{r_c}=0,0.1,1,\infty$，试画出幅频曲线。

答案：(a)

$$H_{xz}(\omega)=\frac{ri\omega}{(k-m\omega^2)+i\omega r}.$$

习题 5-4 如图所示的车辆模型，在地面不平度输入 $x(t)$ 作用下产生振动。试求：

(a) 对应于质量 m 的绝对位移输出 $z(t)$的频率响应函数；

(b) 对应于质量 m 的绝对加速度输出 $\ddot{z}$ (t) 的频率响应函数。

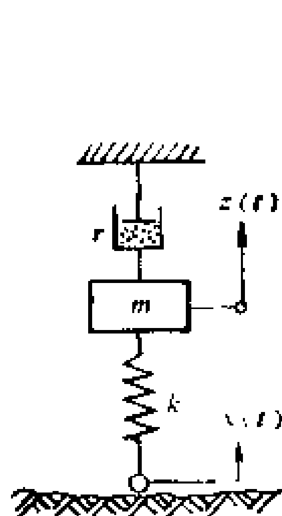
答案：

$$H_{xz}(\omega)=\frac{k}{k-m\omega^2+ir\omega},$$

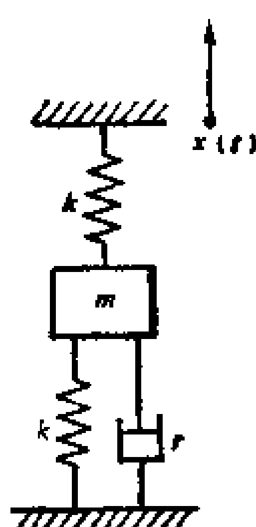
$$H_{x\ddot{z}}(\omega)=\frac{-\omega^2k}{k-m\omega^2+ir\omega}.$$

习题 5-5 如图所示振动系统的上部支承面按锯齿形波 $x(t)$ 的规律运动。试用频率响应函数法确定质量 m 的绝对位移响应 z。

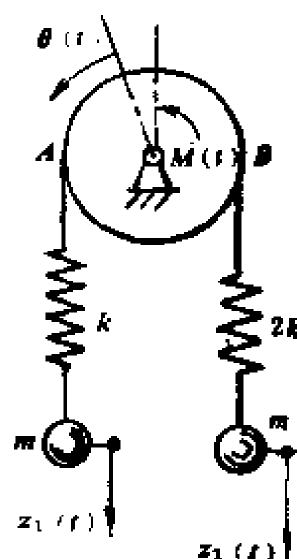
答案：



习题图 5-4



习题图 5-5



习题图 5-6

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}z(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{A}{4}+\frac{Ak}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-m\alpha^2+2k)^2+r^2\alpha^2}\left\{\left[\frac{(-1)^n-1}{2\pi n^2}(-m\alpha^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2k)-\frac{(-1)^n}{n}r\alpha\cos\alpha t+\frac{(-1)^n-1}{2\pi n^2}r\alpha-\frac{(-1)^n}{n}(-m\alpha^2+2k)\right]\sin\alpha t\right\},$$

式中
$$\alpha=\frac{2\pi n}{t}.$$

习题 5-6 一半径为 r 的滑轮，其转动惯量为 $2mr^2$，在滑轮两边用钢丝绳挂上两个相等的质量 m，钢丝绳的弹簧刚度分别为 k 及 $2k$。滑轮可以自由转动，两质量只能作上、下运动，在滑轮上受到力矩M的激励，求此系统对于左边质量 m 的铅垂绝对位移输出 z_1 的频率响应函数。

答案：

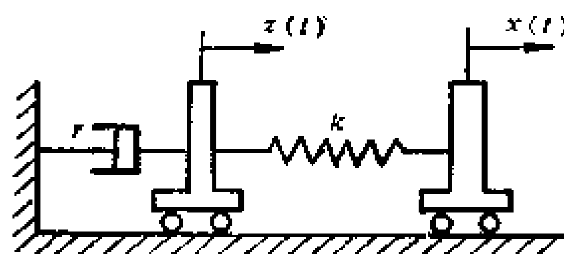
$$H_{Mz_1}(\omega)=\frac{\left(-\frac{\omega^2}{rk}+\frac{2}{mr}\right)}{\left(-\frac{2\omega^6}{\omega_0^4}+\frac{9\omega^4}{\omega_0^2}-8\omega^2\right)}.$$

习题 5-7 两无质量小车及弹簧、阻尼器所组成的振动系统如习题图5-7所示。若输入为位移 $x(t)$，输出为绝对位移$z(t)$，求复频响应函数 $H_{xz}(\omega)$和脉冲响应函数 $h_{xz}(t)$。

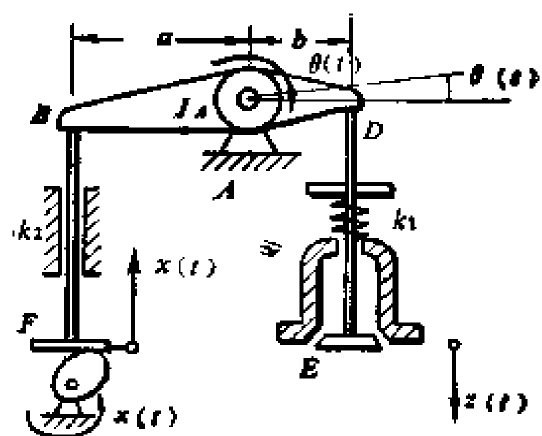
答案：

$$H_{zx}(\omega)=\frac{k}{k+ir\omega},$$

$$h_{xz}(t)=\frac{k}{r}e^{-\frac{k}{r}t}\quad(t\geqslant 0).$$



习题图 5-7



习题图 5-8

习题 5-8 发动机气门机构如图所示，若将凸轮转动时挺杆 FB 底部产生的位移 $x(t)$ 作为系统的输入，而将气门的振动位移 $z(t)$ 作为输出，求表示系统动态特性的脉冲响应函数。除摇臂外均不计质量。

答案：

$$h_{xz}(t)=\begin{cases}\dfrac{bak_2}{\sqrt{J_A(k_1b^2+k_2a^2)}}\sin b\sqrt{\dfrac{k_1b^2+k_2a^2}{J_A}}\,t & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

习题 5-9 固结在两根等长度、等直径圆轴上的齿轮 A 和 B，以速比 i 互相啮合。且圆轴的 D 端固定，在初始时刻系统处于静止。求此系统的 C 端受角位移 $\theta_1(t)$ 激励后，对齿轮 B 角位移输出 $\theta_3(t)$ 的频率响应函数和脉冲响应函数。

答案：

$$H_{\theta_1\theta_3}(\omega)=\frac{ki}{-\omega^2(J_Ai^2+J_B)+k(i^2+1)},$$

$$h_{\theta_1\theta_3}(t)=\begin{cases}\dfrac{ki}{(J_Ai^2+J_B)k(i^2+1)}\sin\omega_0 t & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

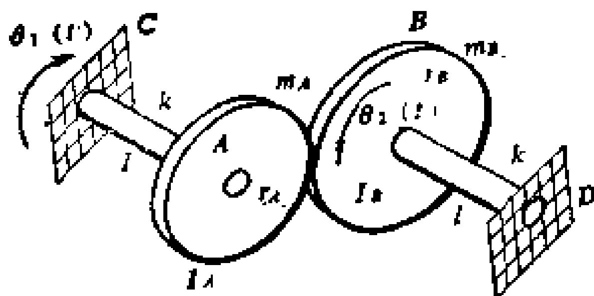
式中
$$\omega_0=\sqrt{\frac{k(i^2+1)}{J_Ai^2+J_B}}.$$

k 为轴的扭转刚度。

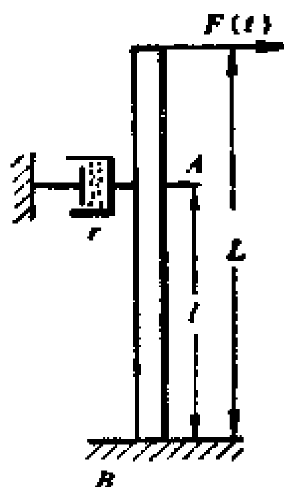
习题 5-10 图示系统中输入为力 $F(t)$，输出为 A 点的挠度 $z(t)$，悬臂梁的长度为 L。当自由端作用一横向力 P 时，离固定端距离为 x 处的挠度可表示为 $\frac{P}{6EI}(3x^2L-x^3)$，式中 EI 为梁的抗弯刚度，求此系统的频率响应函数 $H_{Fz}(\omega)$ 和脉冲响应函数 $h_{Fz}(t)$。

答案：

$$H_{Fz}(\omega)=\frac{\frac{1}{2}(3L/l-1)}{3EI/l^3+ir\omega},$$



习题图 5-9



习题图 5-10

$$h_{Fz}(t)=\begin{cases}\frac{(3L/l-1)}{2r}e^{-(3EI/rl^3)t} & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

习题 5-11 图示系统，各参数均表示在图上，$x(t)$ 表示位移激励，求对于角位移 $\theta(t)$ 及线位移 $z(t)$ 响应的频率响应函数。

答案：

$$H_{xz}(\omega)=\frac{1}{\Delta}[k_3l(k_1+r_1i\omega)];$$

$$H_{x\theta}(\omega)=\frac{1}{\Delta}[(k_1+r_1i\omega)(-2m\omega^2+r_2i\omega+k_2+k_3)],$$

式中，$\Delta=l[(-2m\omega^2+r_2i\omega+k_2+k_3)(-2m\omega^2+r_1i\omega+k_1+k_3)-k_3^2]$.

习题 5-12 图示系统受基础位移激励 $x(t)$，求两个质量铅垂位移 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 的频率响应函数和脉冲响应函数。

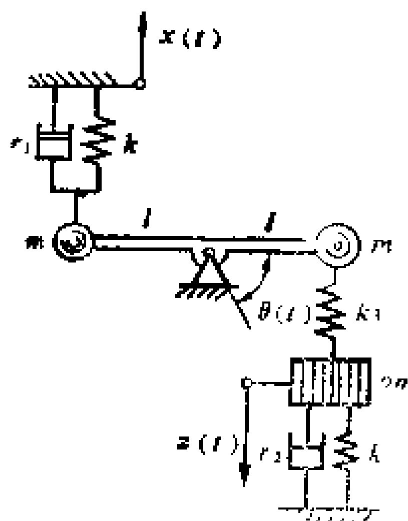
答案：

$$H_{z_1z_1}(\omega)=\frac{4\,\omega_0^4-\omega_0^2\omega^2+i\,4\,\zeta\omega_0^3\omega}{(\omega^4-5\,\omega_0^2\omega^2+5\,\omega_0^4)+i(6\,\zeta\omega_0^3\omega-4\,\zeta\omega_0\omega^3)},$$

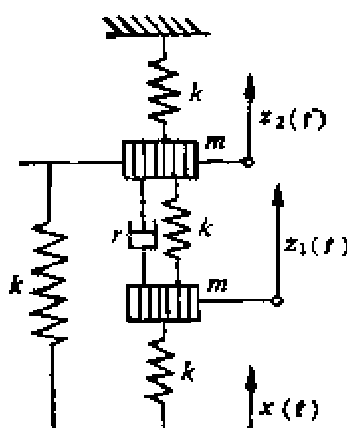
$$H_{z_1z_2}(\omega)=\frac{3\,\omega_0^4-\omega_0^2\omega^2+i\,4\,\zeta\omega_0^3\omega}{(\omega^4-5\,\omega_0^2\omega^2+5\,\omega_0^4)+i(6\,\zeta\omega_0^3\omega-4\,\zeta\omega_0\omega^3)}.$$

式中 $\zeta=\frac{r}{2\sqrt{km}}$，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

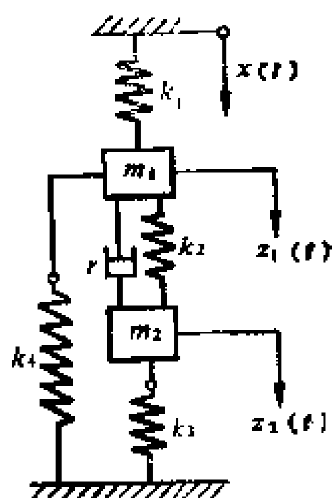
习题 5-13 图示系统顶面受位移激励 $x(t)$，求两个质量的铅垂位移 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 的频率响应函数和脉冲响应函数。



习题图 5-11



习题图 5-12



习题图 5-13

答案：

$$H_{xz_1}(\omega)=\frac{k_1[-m\omega^2+ri\omega+(k_2+k_3)]}{\Delta},$$

$$H_{xz_2}(\omega)=\frac{k_1(ri\omega+k_2)}{\Delta}.$$

$$h_{xz_1}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{xz_1}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\quad(t\geqslant0),$$

$$h_{xz_2}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{xz_2}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\quad(t\geqslant0).$$

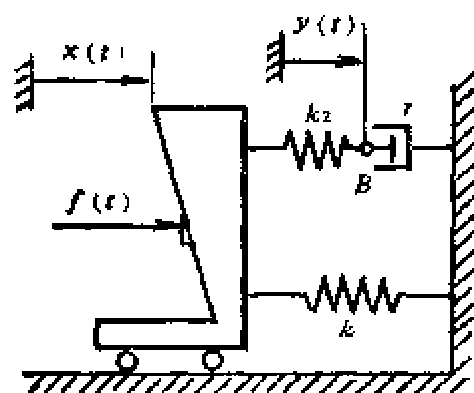
式中 $\Delta=m^2\omega^4-2\,mri\omega^3-r^2\omega^2+(k_1+2\,k_2+k_3+k_4)(ri\omega-m\omega^2)+(k_1+$
$+k_2+k_4)(k_2+k_3)$

习题 5-14 图示系统中，无质量小车受到平稳随机力 $f(t)$ 的作用，已知 k_1、k_2 和 r。若结点 B 的位移用 $y(t)$ 表示，求对于无质量小车的位移 $x(t)$ 的复频响应函数。

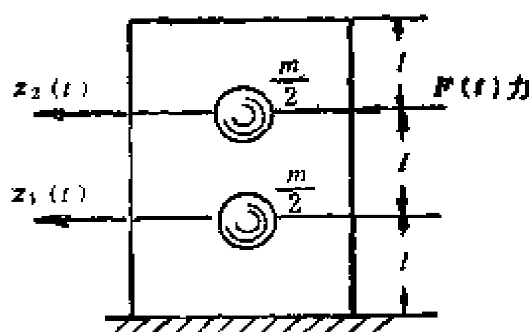
答案：

$$H_{fx}(\omega)=\frac{k_1k_2^2+(k_1+k_2)r^2\omega^2-i\omega rk_2^2}{(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2r^2\omega^2}.$$

习题 5-15 图示三层楼建筑物的第二和第三层上，各分布着全部质量的一半。各层间的抗剪刚度系数均相等，求在三层楼板上受力激励 $F(t)$ 后，对于二层楼板绝对位移 $z_1(t)$ 的频率响应函数和脉冲响应函数。



习题图 5-14



习题图 5-15

答案：

$$H_{Fz_1}(\omega)=\frac{2}{m\omega_0^2}\cdot$$

$$\frac{2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}+1}{\left[-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+4i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}+2\right]\left[-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}+1\right]-\left[2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}+1\right]^2}$$

式中 $\omega_0^2=\frac{2k}{m}$，$\zeta=\frac{r}{\sqrt{2mk}}$.

$$h_{Fz_1}(t)=\frac{2}{\sqrt{5}\,m}\left\{\frac{1}{\lambda_1\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_1}{\omega_0}\right)^2}}e^{-\frac{\zeta}{\omega_0}\lambda_1^2t}\sin\lambda_1\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_1}{\omega_0}\right)^2}\,t-\right.$$

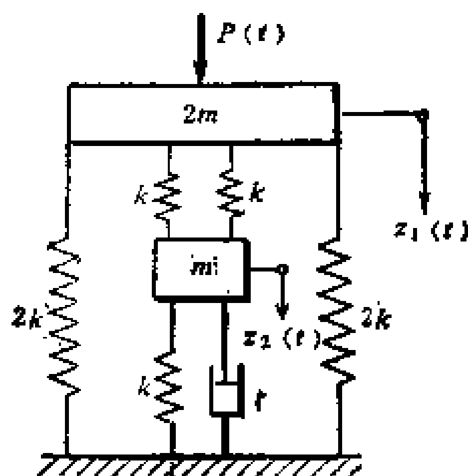
$$\left.-\frac{1}{\lambda_2\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_2}{\omega_0}\right)^2}}e^{-\frac{\zeta}{\omega_0}\lambda_2^2t}\sin\lambda_2\sqrt{1-\left(\frac{\zeta\lambda_2}{\omega_0}\right)^2}\,t\right\}\quad(t\geqslant0).$$

式中

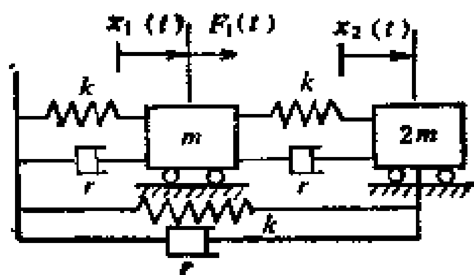
$$\lambda_1^2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\omega_0^2,$$

$$\lambda_2^2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\omega_0^2。$$

习题 5-16 如图所示系统的两个质量只能沿铅垂方向运动。若质量 $2m$ 上作用有铅垂力 $P(t)$，求质量 m 绝对位移响应 $z_2(t)$ 的频率响应函数。



习题图 5-16



习题图 5-17

答案：

$$H_{Pz_2}(\omega)=\frac{k}{(-m\omega^2+3k)(-m\omega^2+ri\omega+3k)-2k^2}。$$

习题 5-17 图示系统，其中力 $F_1(t)$ 可以看作是激励，求质量 $2m$ 的绝对位移响应 $x_2(t)$ 的频率响应函数。

答案：

$$H_{F_1x_2}(\omega)=\frac{F_1(ri\omega+k)}{(-m\omega^2+2ri\omega+2k)(-2m\omega^2+2ri\omega+2k)-(ri\omega+k)^2}。$$

参 考 文 献

[1] S·铁木辛柯，D·H·杨，工程中的振动问题，人民铁道出版社，1978。

[2] 中川宪治等，工程振动学，上海科学技术出版社，1981。

[3] Leonard Meirovitch, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, 1975.

第六章　受平稳随机激励的线性时不变系统之响应计算

在确定性振动中，激励与响应之间的关系，一般用微分方程（还可以用差分方程，积分方程，矩阵方程等）来描述。方程的非齐次项（激励项）是确定的，初始条件也是确定的。

在随机振动中，由于激励是随机过程，因此，即使是线性时不变系统，其响应也一定是随机过程。这时，激励与响应均必须用概率和统计的方法来描述。激励与响应之间的数学关系虽然可以用随机微分方程表示（该方程中可能包含随机的非齐次项或随机初始条件），但方程的解只能是概率统计量。

本章所要讨论的内容是建立随机振动理论、得到计算响应概率特征的方法。这一方法在评价工作在随机振动环境内各类系统的安全等方面，有很广泛的应用。

例如设计超高层建筑、海洋平台、堤坝、核反应堆、大型电机、车辆、航天飞行器等结构物时，要考虑它们在随机激励下的动强度和动刚度是否在允许的范围内，安全可靠度为多少的问题。

又如设计汽车、火车、拖拉机、工程机械、坦克、航天飞行器时，既有乘座的舒适性问题（需要符合人体在工作时间内能够承受的规范，见附录6），又有各种操纵系统的灵敏度和操纵性、稳定性是否合乎要求的问题。

又如设计加工设备时，应分析在各种工况下（如车、铣、刨、磨等机床的切削，轧钢机的压延、造纸机的滚压、塑料机的吹管等），各种动态加工精度是否符合要求，整机、各部件、组件的噪声量级是否符合规范的问题。

再如，配置精密仪器、仪表或设备的减振装置时，要知道它

们能滤去哪些有害的振动频率成分，又对哪些频率成分的幅值降低了多少，确保机器、仪器正常工作的概率是多少等问题。

一、内 容 提 要

1. 响应信息间的关系

当激励和系统特性已知时，要获得响应的各个统计信息，可以通过理论演绎，导出一系列计算公式，这就是响应“预测”问题。这些响应在几个主要领域的信息有着密切的关系，可用图 6-1 表示。

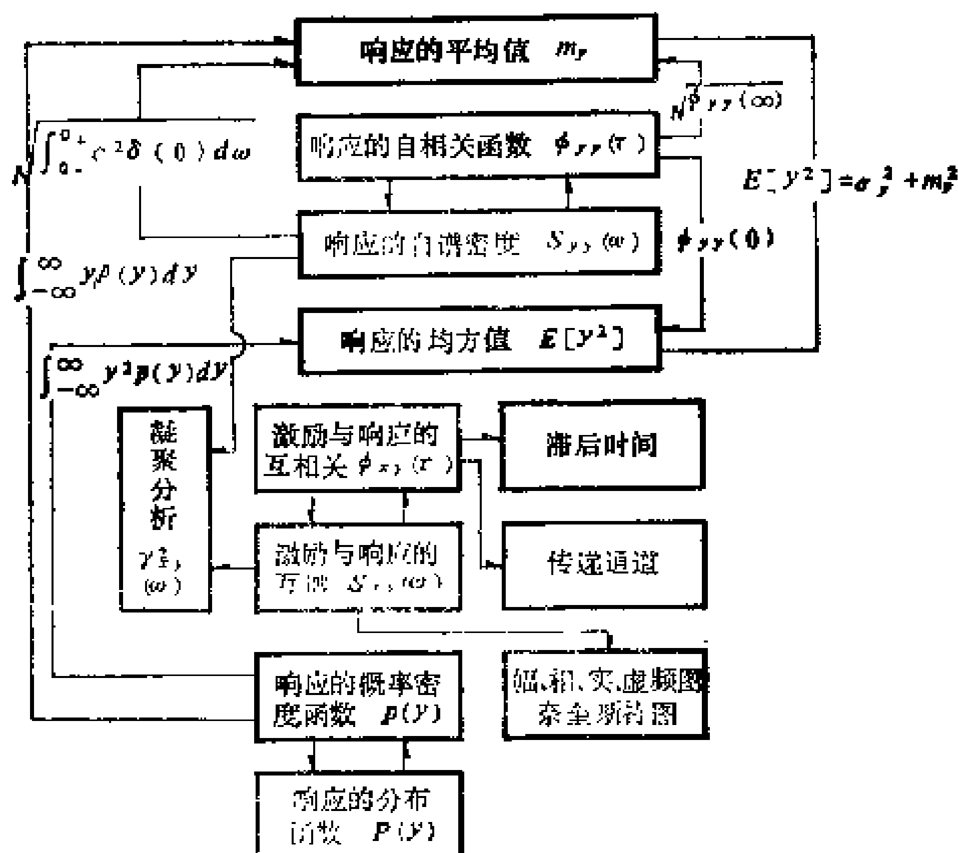


图 6-1

2. 单输入单输出系统

(1) 响应的均值

$$m_y = H(0)m_x, \tag{6-1}$$

式中 $H(0)$为频率响应函数 $H(\omega)$ 在 $\omega=0$ 时的值，m_x 为输入的

平均值。

(2) 响应的均方值

$$\psi_y^2 = E[y^2] = \phi_{yy}(0) \tag{6-2}$$

或

$$\psi_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega, \tag{6-3}$$

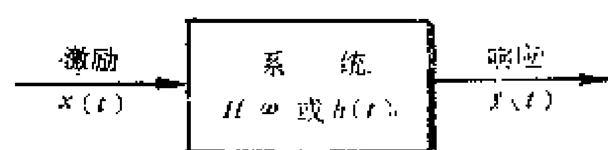


图 6-2

式中 $\phi_{yy}(0)$ 为 $\tau=0$ 时的响应自相关函数，

$S_{xx}(\omega)$ 为激励的自功率谱密度函数，

$H(\omega)$为系统的频率响应函数。

(3) 响应的自相关函数

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) \phi_{xx}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2. \tag{6-4}$$

式中 $\phi_{xx}(\tau)$为激励的自相关函数，

$h(\theta)$为系统的脉冲响应函数。

(4) 激励与响应的互相关

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \phi_{xx}(\tau - \theta) d\theta. \tag{6-5}$$

(5) 响应的自谱

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega). \tag{6-6}$$

(6) 激励与响应的互谱

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega). \tag{6-7}$$

(7) 凝聚函数(相干函数)

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)}. \tag{6-8}$$

(8) 用半功率带宽求阻尼系数

$$\gamma_{eq} = m\Delta\omega.$$

式中 γ_{eq} 为等效粘性阻尼系数，

m 为单自由度系统的振动质量，

$\Delta\omega$ 为记录由位移激励引起位移响应的频率响应函数为 $|H_{xy}(\omega)|$，作出 $|H_{xy}(\omega)|$ 对 ω 的曲线图（图 6-3），在峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处作一水平线，交曲线于 P_1，P_2，这两点的间距 $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$，称半功率带宽。

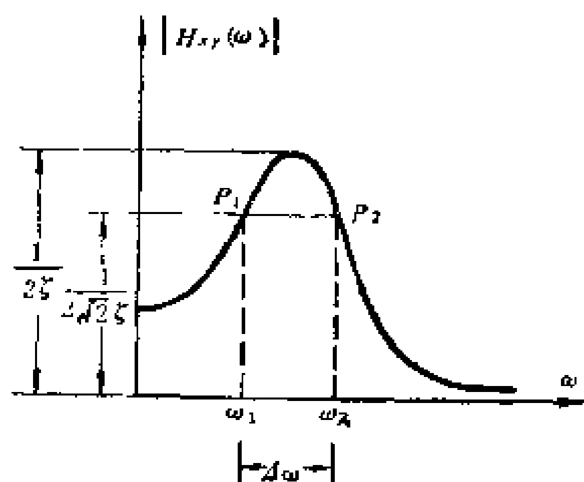


图 6-3

3. 多输入多输出系统

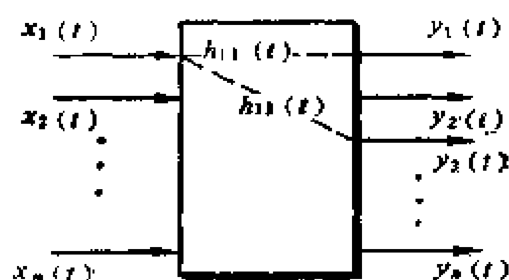


图 6-4

在多输入与多输出的情况下，系统的激励、动态特性和响应都可以写成矩阵形式，矩阵中各元素均加以脚标，第一个足标表示激励，第二个脚标表示响应，如 $h_{13}(t)$表示在 1 处的激励引起 3 处的响应的脉冲响应函数，$S_{x_m y_n}(\omega)$ 表示 m 处的激励引起 n 处的响应的互谱密度函数，余类推。

（1）频率响应矩阵

$$\overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega)\cdots H_{1n}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega)\cdots H_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots \\ H_{m1}(\omega) & H_{m2}(\omega) \quad H_{mn}(\omega) \end{bmatrix} \tag{6-9}$$

（2）脉冲响应矩阵

$$\overline{h(\theta)}=\begin{bmatrix} h_{11}(\theta) & h_{12}(\theta)\cdots & h_{1n}(\theta) \\ h_{21}(\theta) & h_{22}(\theta)\cdots & h_{2n}(\theta) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m1}(\theta) & h_{m2}(\theta)\cdots & h_{mn}(\theta) \end{bmatrix} \tag{6-10}$$

(3) 激励与响应的列阵

$$\overline{x(t)}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \tag{6-11}$$

$$\overline{y(t)}=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}. \tag{6-12}$$

(4) 激励与响应的相关矩阵

$$\overline{\phi_x(\tau)}=\begin{bmatrix} \phi_{x_1x_1}(\tau) & \phi_{x_1x_2}(\tau) & \cdots & \phi_{x_1x_m}(\tau) \\ \phi_{x_2x_1}(\tau) & \phi_{x_2x_2}(\tau) & \cdots & \phi_{x_2x_m}(\tau) \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{x_mx_1}(\tau) & \phi_{x_mx_2}(\tau) & \cdots & \phi_{x_mx_m}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{6-13}$$

$$\overline{\phi_y(\tau)}=\begin{bmatrix} \phi_{y_1y_1}(\tau) & \phi_{y_1y_2}(\tau) & \cdots & \phi_{y_1y_n}(\tau) \\ \phi_{y_2y_1}(\tau) & \phi_{y_2y_2}(\tau) & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{y_ny_1}(\tau) & \phi_{y_ny_2}(\tau) & \cdots & \phi_{y_ny_n}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{6-14}$$

(5) 激励谱与响应谱矩阵

$$\overline{S_x(\omega)}=\begin{bmatrix} S_{x_1x_1}(\omega) & S_{x_1x_2}(\omega)\cdots S_{x_1x_m}(\omega) \\ S_{x_2x_1}(\omega) & S_{x_2x_2}(\omega)\cdots S_{x_2x_m}(\omega) \\ \vdots & \vdots \\ S_{x_mx_1}(\omega) & S_{x_mx_2}(\omega)\cdots S_{x_mx_m}(\omega) \end{bmatrix}, \tag{6-15}$$

$$\overline{S_y(\omega)}=\begin{bmatrix} S_{y_1y_1}(\omega) & S_{y_1y_2}(\omega) & \cdots & S_{y_1y_n}(\omega) \\ S_{y_2y_1}(\omega) & S_{y_2y_2}(\omega) & \cdots & S_{y_2y_n}(\omega) \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{y_ny_1}(\omega) & S_{y_ny_2}(\omega) & \cdots & S_{y_ny_n}(\omega) \end{bmatrix}. \tag{6-16}$$

(6) 激励与响应之间的互相关矩阵和互谱矩阵

$$\overline{\phi_{xy}(\tau)}=\begin{bmatrix}\phi_{x_1y_1}(\tau) & \phi_{x_1y_2}(\tau) & \cdots & \phi_{x_1y_n}(\tau)\\ \phi_{x_2y_1}(\tau) & \phi_{x_2y_2}(\tau) & \cdots & \phi_{x_2y_n}(\tau)\\ \vdots & & & \vdots\\ \phi_{x_my_1}(\tau) & \phi_{x_1y_2}(\tau) & \cdots & \phi_{x_1y_n}(\tau)\end{bmatrix}, \tag{6-17}$$

$$\overline{S_{xy}(\omega)}=\begin{bmatrix}S_{x_1y_1}(\omega) & S_{x_1y_2}(\omega) & \cdots & S_{x_1y_n}(\omega)\\ S_{x_2y_1}(\omega) & S_{x_2y_2}(\omega) & \cdots & S_{x_2y_n}(\omega)\\ \vdots & & & \vdots\\ S_{x_my_1}(\omega) & S_{x_my_2}(\omega) & \cdots & S_{x_my_n}(\omega)\end{bmatrix}. \tag{6-18}$$

(7) 求各种响应的矩阵表示式

(a) 均值

$$\overline{m_y}=\overline{H(0)^T}\ \overline{m_x}. \tag{6-19}$$

(b) 响应的相关矩阵

$$\overline{\phi_y(\tau)}=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(\theta_1)^T}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\phi_x(\tau+\theta_1-\theta_2)}\,\overline{h(\theta_2)}\,d\theta_1 d\theta_2, \tag{6-20}$$

式中T为矩阵的转子。

(c) 激励与响应的互相关矩阵

$$\overline{\phi_{xy}(\tau)}=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\phi_x(\tau-\theta)}\ \overline{h(\theta)}\,d\theta. \tag{6-21}$$

(d) 响应谱矩阵

$$\overline{S_y(\omega)}=\overline{H^*(\omega)^T}\ \overline{S_x(\omega)}\,\overline{H(\omega)}. \tag{6-22}$$

式中＊是共轭记号

(e) 激励与响应的互谱矩阵

$$\overline{S_{xy}(\omega)}=\overline{S_x(\omega)}\ \overline{H(\omega)}, \tag{6-23}$$

$$\overline{S_{xy}(\omega)}=\overline{S_{yx}^*(\omega)^T}, \tag{6-24}$$

$$\overline{S_{xy}^*(\omega)}=\overline{S_x(\omega)}\,\overline{H^*(\omega)}. \tag{6-25}$$

(f) 凝聚函数

对单输入单输出系统，常凝聚函数由下式定义：

$$\gamma_{xy}^2(\omega)=\frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}. \qquad (6-26)$$

对多输入单输出系统，多重凝聚函数由下式定义：

$$\gamma_{xy}^2(\omega)=\frac{\overline{S_{yx}(\omega)}\ \overline{S_x(\omega)}^{-1}\ \overline{S_{xy}(\omega)}}{S_{yy}(\omega)}. \qquad (6-27)$$

4．计算响应的步骤

（1）选择研究对象（即系统），分析力和运动，弄清什么是激励、系统和响应。

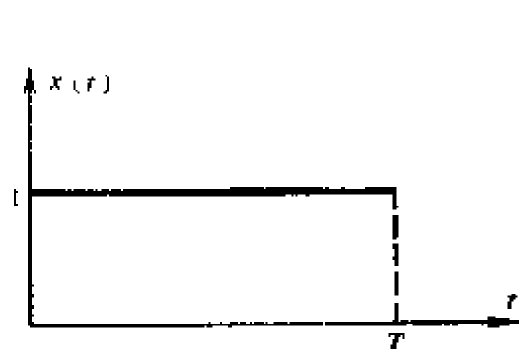
（2）计算系统的频率响应函数或脉冲响应函数。

（3）代入公式（6-6）、（6-7）或（6-22）、（6-23），算出响应的自谱及响应与激励的互谱。

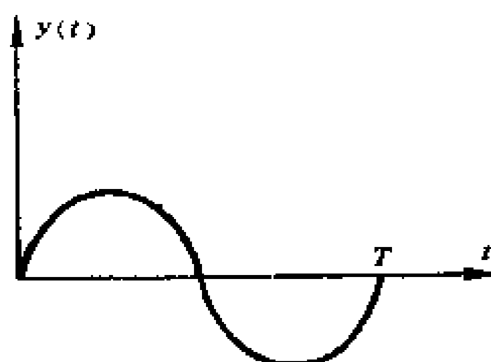
（4）再用各种公式计算响应的时差域与幅域等信息。

二、例　　题

例题 6-1　如果一个线性系统的输入 $x(t)$ 为矩形波，输出 $y(t)$ 为简单的正弦波，如例题图 6-1-1 和 2 所示：



例题图 6-1-1



例题图 6-1-2

$$x(t)=\begin{cases}1 & (0<t<T),\\ 0 & (t<0;t>T);\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{2\pi t}{T} & (0<t<T),\\ 0 & (t<0;\ t>T).\end{cases}$$

若输入是自谱密度为 S_0 的平稳白噪声过程，求输出过程的自功率谱密度函数。

解：先将 $x(t)$ 和 $y(t)$ 进行付里叶变换：

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi i\omega}(1-e^{-i\omega T}), \quad (1)$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T}\sin\frac{2\pi t}{T}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{2\pi T(1-e^{-i\omega T})}{4\pi^2-T^2\omega^2}, \quad (2)$$

所以

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{2\pi T(1-e^{-i\omega T})}{4\pi^2-T^2\omega^2}\Big/\frac{(1-e^{-i\omega T})}{2\pi i\omega}$$

$$=\frac{4\pi^2 Ti\omega}{4\pi^2-T^2\omega^2}. \quad (3)$$

当输入自谱密度为 S_0 的白噪声时，输出的自功率谱密度函数为：

$$S(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot S_0=\left[\frac{4\pi^2 T\omega}{4\pi^2-T^2\omega^2}\right]^2\cdot S_0.$$

例题 6-2 如果想得到一个自谱为

$$S_{yy}(f)=\frac{(2\pi f)^2+4}{(2\pi f)^4+10(2\pi f)^2+9}$$

的响应随机过程，而系统的激励仅一个输入，且此输入具有单位白噪声的自谱。求此可实现的线性、时不变系统的频率响应函数。

解： 从题意知

$$S_{xx}(f)=1,$$

则根据公式（6-6）得

$$|H(f)|^2=\frac{(2\pi f)^2+4}{(2\pi f)^4+10(2\pi f)^2+9} \qquad (1)$$

$$\therefore \qquad H(f)=\frac{i2\pi f+2}{(i2\pi f)^2+a_1(i2\pi f)+3}, \qquad (2)$$

把 $H(f)$与它的共轭相乘，可得 $a_1=4$。

讨论：(1) 因 (2) 式所示的$H(f)$是 f 的单值函数，故它表示可实现的线性时不变系统。

(2) 从 (1) 式可知还存在另一个，与 (2) 式共轭的系统，即

$$H_2(f)=\frac{-i2\pi f+2}{(i2\pi f)^2+4(i2\pi f)+3}, \qquad (3)$$

此式也表示一个可实现的线性时不变系统。

例题 6-3 例题图 6-3-1 所示系统的输入为 $W(t)$，输出为 $y(t)$，$W(t)$是谱密度为 $N_0/2$、均值为零的白噪声随机过程的一个样本。如果用一个等效的系统代替 $H(f)$，即设计一个理想的低通滤波器为

$$H_{eq}(f)=\begin{cases}|H(f)|_{max} & (|f|\leqslant B_n),\\ 0 & (|f|>B_n).\end{cases}$$

这时的输出为 $y_{eq}(t)$。求 $E[y^2_{eq}(t)]$等于 $E[y^2(t)]$时的 B_n 计算式。式中 B_n 表示系统的有限带宽，它是一个有用的特性。因为系统若有同样的有效噪声带宽，则当输入是白噪声时，输出将具有同样的均方值。

解：本题是单输入单输出系统，因为

$$S_{WW}(f)=\frac{N_0}{2},$$



例题图 6-3-1

所以

$$S_{yy}(f)=\frac{N_0}{2}|H(f)|^2. \qquad (1)$$

则响应的均方值

$$E[y^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)df=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}|H(f)|^2df$$

$$=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df. \quad (2)$$

对于等效系统，均方值为

$$E[y^2{}_{eq}(t)]=\int_{-Bn}^{B}\frac{N_0}{2}(|H(f)|_{max})^2df, \quad (3)$$

由于（3）式中的$|H(f)|_{max}$不是f的函数，所以得

$$E[(y^2{}_{eq}(t)]=2B_n\frac{N_0}{2}(|H(f)|_{max})^2.$$

从（2）与（3）式相等，得

$$B_N=\frac{1}{2}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df}{(|H(f)|_{max})^2}. \quad (4)$$

讨论：（1）当输入自谱不是等"强度"时，则输出均方值计算式为：

$$E[y^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}S_{WW}(f)|H(f)|^2df.$$

（2）当系统的频率响应函数

$$H(f)=\frac{\beta}{(i2\pi f)+\alpha}$$

时，计算等效有限噪声带宽是很方便的。

因为

$$|H(f)|_{max}=H(0)=\frac{\beta}{\alpha},$$

而（4）式的分子

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\beta}{(i2\pi f)+\alpha}\right|^2df$$

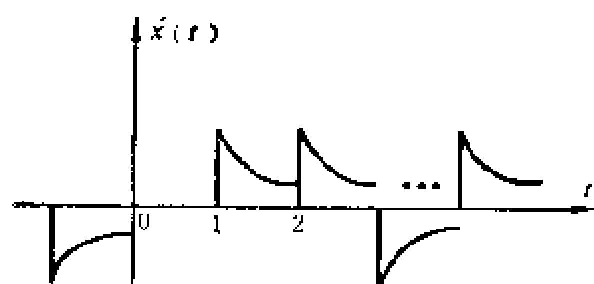
$$=\frac{\beta^2}{2\alpha}\text{（查表，见附录 8）},$$

$$\therefore \qquad B_n = \frac{1}{2}\frac{\beta^2/2\alpha}{\beta^2/\alpha^2} = \frac{\alpha}{4}.$$

例题 6-4 随机过程的一个典型样本函数如例题图 6-4-1 所示。

(a) 若 $x[t]$ 的自谱为

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2 + k^2},$$



例题图 6-4-1

输入到两个系统，其相应的输出是 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。若两系统的频率响应函数分别为

$$H_1(f) = \frac{i\,2\pi f + \alpha}{i\,2\pi f + \beta},$$

$$H_2(f) = \frac{i\,2\pi f - \alpha}{i\,2\pi f + \beta},$$

求 $S_{y_1y_1}(f)$ 和 $S_{y_2y_2}(f)$。

(b) 若激励是脉冲，脉冲到达时间可以由平均功率为每一秒一个脉冲的泊桑计数过程来描述。每一个脉冲具有相同的形状，其函数式为

$$z(t) = e^{-kt}u_{-1}(t),$$

式中，$u_{-1}(t)$ 为单位阶跃函数，若将这样的脉冲输入到两个系统中去，求 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 输出信号的形状。

解：(a) 根据单输入、单输出线性系统输入和输出自谱之间的关系式

$$S_{y_ky_k}(f) = S_{xx}(f)\,|H_k(f)|^2,\quad k = 1, 2.$$

由于 $$|H_1(f)|^2 = \left|\frac{i\,2\pi f + \alpha}{i\,2\pi f + \beta}\right|^2 = \frac{(2\pi f)^2 + \alpha^2}{(2\pi f)^2 + \beta^2},$$

$$|H_2(f)|^2 = \left|\frac{i\,2\pi f - \alpha}{i\,2\pi f + \beta}\right|^2 = \frac{(2\pi f)^2 + \alpha^2}{(2\pi f)^2 + \beta^2}.$$

所以两系统的输出自谱将是相同的

$$S_{y_1y_1}(f) = S_{y_2y_2}(f) =$$

$$=\frac{(2\pi f)^2+\alpha^2}{[(2\pi f)^2+k^2][(2\pi f)^2+\beta^2]}.$$

(b) 将 $x(t)=z(t)$ 输入到第一个系统中，记其输出为 $y_{z1}(t)$，则

$$Y_{z_1}(f)=Z(f)H_1(f).$$

式中 $Y_{z_1}(f)$和 $Z(f)$ 分别是 $y_{z_1}(t)$、$z(t)$ 的付里叶变换，

$$Z(f)=\frac{1}{i2\pi f+k},$$

$$\therefore \qquad Y_{z_1}(f)=\frac{1}{i2\pi f+k}\cdot\frac{i2\pi f+\alpha}{i2\pi f+\beta}$$

$$=\frac{\frac{\alpha-k}{\beta-k}}{i2\pi f+k}+\frac{\frac{\alpha-\beta}{k-\beta}}{i2\pi f+\beta}.$$

经反变换得

$$y_{z_1}(t)=\left[\frac{\alpha-k}{\beta-k}e^{-kt}+\frac{\alpha-\beta}{k-\beta}e^{-\beta t}\right]u_{-1}(t),$$

将 $x(t)=z(t)$ 输入到第二个系统中，记其输出为 $y_{z_2}(t)$，则

$$Y_{z_2}(f)=Z(f)\cdot H_2(f)$$

$$=\frac{1}{i2\pi f+k}\cdot\frac{i2\pi f-\alpha}{i2\pi f+\beta}$$

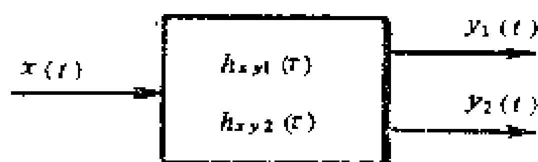
$$=\frac{\frac{\alpha-k}{\beta-k}}{i2\pi f+k}-\frac{\frac{-\alpha-\beta}{k-\beta}}{i2\pi f+\beta},$$

对应的时间函数为

$$y_{z_2}(t)=\left\{\frac{\alpha+k}{k-\beta}e^{-kt}+\frac{\alpha+\beta}{\beta-k}e^{-\beta t}\right\}u_{-1}(t),$$

$y_{z_1}(t)$与 $y_{z_1}(t)$之差为

$$y_{z_1}(t)-y_{z_2}(t)=\left\{\frac{2\alpha}{\beta-k}e^{-kt}+\frac{2\alpha}{k-\beta}e^{-\beta t}\right\}u_{-1}.$$



例题图 6-5-1

例题 6-5 例题图 6-5-1 所示单输入两输出系统中，输入为具有单位自谱密度的白噪声过程的一个样本函数。求：

(a) $y_1(t)$和 $y_2(t)$不相关的充分必要条件；

(b) 用 $H_{xy_1}(f)$ 和 $H_{xy_2}(f)$表示不相关的充分必要条件。

解 (a) 当互相关系数 $\rho_{y_1y_2}(\tau)=0$ 时，则称 $y_1(t)$和 $y_2(t)$不相关. 一般说来，两个随机变量互相关系数为零的充要条件是这两个随机变量以概率 1 线性不相关。

本题中 $y_1(t)$与 $y_2(t)$不相关的充分必要条件是：

$$\phi_{y_1y_2}(\tau)-\phi_{y_2y_1}(\tau)=0. \tag{1}$$

(1) 必要性的证明

$$\phi_{y_1y_2}(\tau)=\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\rho_{y_1y_2}(\tau)+m_{y_1}m_{y_2}, \tag{2}$$

即

$$\rho_{y_1y_2}(\tau)=\frac{\phi_{y_1y_2}(\tau)-m_{y_1}m_{y_2}}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}}. \tag{3}$$

因为 $x(t)$为白噪声，所以

$$m_x=\sqrt{\int_{0^-}^{0^+}S_{xx}(f)df}=0 \quad (\because S_{xx}(0)\text{为有限值}),$$

$$m_{y_1}=H_{xy_1}(0)\cdot m_x=0,$$

$$m_{y_2}=H_{xy_2}(0)\cdot m_x=0.$$

由 (3) 式看出，若要 $\rho_{y_1y_2}(\tau)=0$ 成立，必须使

$$\phi_{y_1y_2}(\tau)=0,$$

$\therefore$ $\phi_{y_1y_2}(\tau)=0$ 是 $y_1(t)$和 $y_2(t)$不相关的必要条件。

(2) 充分性的证明

对 (2) 式，由于 $m_{y_1}=m_{y_2}=0$，

$$\sigma_{y_1}^2=E[y_1^2]-m_{y_1}^2=E[y_1^2]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} S_{y_1y_1}(\omega)d\omega \neq 0,$$

故

$$\sigma_{y_1} \neq 0.$$

类似有

$$\sigma_{y_2} \neq 0,$$

所以当 $\phi_{y_1y_2}(\tau)=0$ 时，必有 $\rho_{y_1y_2}(\tau)=0$ 成立。

$\therefore$ $\phi_{y_1y_2}(\tau)=0$ 也是 $y_1(t)$和 $y_2(t)$ 不相关的充分条件。

(b) $\because$ $$S_{y_1y_2}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{y_1y_2}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau, \tag{4}$$

而 $$\phi_{y_1y_2}(\tau)=0,$$

$$\therefore \quad S_{y_1y_2}(f)=0. \tag{5}$$

另一方面，

$$S_{y_1y_2}(f)=H^*_{xy_1}(f)H_{xy_2}(f)S_{xx}(f),$$

但题意所给条件是：

$$S_{xx}(f)=1\neq 0,$$

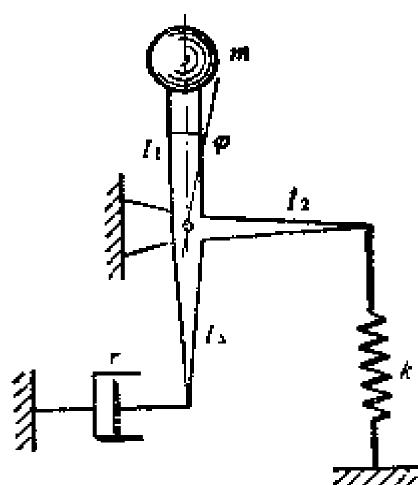
所以要满足(5)式，必须

$$H^*_{xy_1}(f)H_{xy_2}(f)=0, \tag{6}$$

或写成 $$H_{xy_1}(f)H^*_{xy_2}(f)=0. \tag{7}$$

讨论：在传递过程中，当两个传递通道产生的相位差刚好是90°时，通过它们的输出就不相关了。测试仪器中共谱和重谱的测量通道之间就是这样。此外利用自然振型正交性，在振动测试中也可使两个传感器的输出信号不相关。

例题 6-6 例题图 6-6-1 所示振动系统中，质量 $m=0.15$ 公斤·秒²/厘米，刚度 $K=18$ 公斤/厘米，粘性阻尼系数 $r=4.5$ 公斤·秒/厘米，机构尺寸为 $l_1=40$ 厘米，$l_2=20$ 厘米，$l_3=10$ 厘米，杆重不计。已知摆杆随机初始角位移和角速度的概率特征分别为均值 $m_{\varphi_0}=1$ 度，$m_{\dot\varphi_0}=0.1$ 弧度/秒，方差 $D_{\varphi_0}=0.1$ 度²，$D_{\dot\varphi_0}=0.01$ 弧度²/秒²，求摆杆角位移响应 φ 的平均值和方差。



例题图 6-6-1

解：本题为单自由度系统受初始随机激励的响应计算问题，取转角φ为广义坐标，则系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}ml_1^2\dot{\varphi}^2,$$

弹簧势能为

$$U_1=\frac{1}{2}kl_2^2\varphi^2,$$

重力势能为

$$U_2=-mgl_1(1-\cos\varphi)\doteq -mgl_1\cdot\frac{\varphi^2}{2},$$

耗散能为

$$D=\frac{1}{2}rl_3^2\dot{\varphi}^2.$$

将以上各式代入非保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}}=0$$

得

$$ml_1^2\ddot{\varphi}+kl_2^2\varphi-mgl_1\varphi+rl_3^2\dot{\varphi}=0, \qquad (1)$$

或

$$ml_1^2\ddot{\varphi}+rl_3^2\dot{\varphi}+(kl_2^2-mgl_1)\varphi=0. \qquad (2)$$

当 $kl_2^2-mgl_1>0$ 时，(2)式才有稳定的解。

由题意给定的数据，有

$$ml_1^2=0.15\times40^2=240\ (\text{公斤·秒}^2\text{·厘米}),$$

$$rl_3^2=4.5\times10^2=450\ (\text{公斤·秒·厘米}),$$

$$kl_2^2-mgl_1=7200-5880=1320\ (\text{公斤·厘米}),$$

则得振动系统的参数

$$\omega_0=\sqrt{\frac{kl_2^2-mgl_1}{ml_1^2}}=2.345\ (1/\text{秒}),$$

$$\zeta=\frac{\gamma l_3^2}{2\,ml_1^2\cdot\omega_0}=0.4,$$

$$\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}=2.345\sqrt{1-0.4^2}=2.15\quad 1/秒,$$

方程(2)的解为

$$\varphi=e^{-\zeta\omega_0 t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t),$$

将初始条件 $\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$ 代入，则得

$$\varphi=e^{-\zeta\omega_0 t}\left(\varphi_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{\varphi}_0+\zeta\omega_0\varphi_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$=e^{-\zeta\omega_0 t}\left[\varphi_0\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)+\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right],\tag{3}$$

对(3)式两边取平均，得

$$E[\varphi(t)]=e^{-\zeta\omega_0 t}\Big[E[\varphi_0]\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)+$$

$$+\frac{E[\dot{\varphi}_0]}{\omega_d}\sin\omega_d t\Big],\tag{4}$$

对(4)式代入各已知数据，得

$$E[\varphi(t)]=e^{-0.4\times 2.345t}\Big[0.0175\Big(\cos 2.15t+\frac{0.4\times 2.345}{2.15}\cdot$$

$$\cdot\sin 2.15\,t\Big)+\frac{0.1}{2.15}\sin 2.15t\Big]$$

$$=e^{-0.938t}(0.0175\cos 2.15\,t+0.0541\sin 2.15\,t)$$

$$=e^{-0.938t}A_1\sin(2.15\,t+\theta_1),$$

式中

$$A_1=\sqrt{0.0175^2+0.0541^2}=0.0569\ (弧度),$$

$$\theta_1=\mathrm{tg}^{-1}\frac{0.0175}{0.0541}=0.335\ (弧度),$$

$$\therefore\quad E[\varphi(t)]=0.0569\,e^{-0.938t}\sin(2.15\,t+0.335)\ (弧度).\tag{5}$$

下面计算响应的方差 $D[\varphi(t)]$。由(3)式得

$$D[\varphi(t)]=E\{[\varphi(t)-m_\varphi]^2\}$$

$$=E\Big\{(e^{-\zeta\omega_0 t})^2\Big[(\varphi_0-m_{\varphi_0})(\cos\omega_d t+\frac{\zeta\omega_0}{\omega_d}\cdot$$

$$\cdot \sin\omega_d t) + \frac{(\dot{\varphi}_0 - m_{\dot{\varphi}_0})}{\omega_d}\sin\omega_d t \Big]^2 \Big\}$$

$$= e^{-2\xi\omega_0 t}\Big\{ D[\varphi_0]\Big(\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\Big)^2 +$$

$$+ 2C[\varphi_0, \dot{\varphi}_0]\frac{1}{\omega_d}\cdot \sin\omega_d t\Big(\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\Big) +$$

$$+ \frac{D[\dot{\varphi}_0]}{\omega_d^2}\sin^2\omega_d t \Big\}, \qquad (6)$$

式中

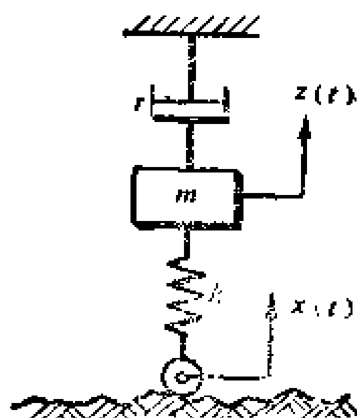
$$C_{\varphi_0\dot{\varphi}_0}(\tau) = E[(\varphi_0 - m_{\varphi_0})(\dot{\varphi}_0 - m_{\dot{\varphi}_0})]$$
$$= \psi_{\varphi_0\dot{\varphi}_0}(0) - m_{\varphi_0}m_{\dot{\varphi}_0}$$
$$= 0 - 0.0175\times 0.1 = -0.00175 \text{ 弧度}^2/\text{秒},$$

将已知各数据代入(6)式，得

$$D[\varphi(t)] = e^{-1.876t}(0.305\cos^2 2.15t - 0.681\sin 4.3t +$$
$$+ 1.511\sin^2 2.15t)\times 10^{-3} \text{ (弧度}^2\text{)}. \qquad (7)$$

讨论：由本题可见，在随机初始条件下，摆角响应的均值和方差都是 t 的函数，因此响应是一个非平稳的随机过程。这是因为初始条件本身虽然是平稳的，但振动是一个过渡过程，是一个衰减过程，所以响应是非平稳的。

例题 6-7 例题图 6-7-1 所示单自由度系统，已知系统的固有频率 $f_0 = 20$ 赫，阻尼比 $\zeta = 0.1$，受基础位移激励 $x(t)$，$x(t)$ 是平稳随机过程，且 $S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = 0.5(g^2\cdot$秒/弧度)(白噪声)，求



例题图 6-7-1

(a) 绝对坐标 $z(t)$ 的响应自谱，

(b) 相对坐标 $y(t) = z(t) - x(t)$ 的响应自谱。

解：(a) 这是一个单自由度系统，系统的振动方程为

$$m\ddot{z}(t)=-k(z-x)-r\dot{z}$$

或

$$m\ddot{z}(t)+r\dot{z}+kz=kx. \tag{1}$$

为了求系统的动态特性，设 $x=Ae^{i\omega t}$，则 $z=H_{xz}(\omega)\cdot Ae^{i\omega t}$，代入(1)式后，得

$$H_{xz}(\omega)=\frac{k}{-m\omega^2+k+i\omega r}, \tag{2}$$

绝对位移响应的激励谱为

$$S_{zz}(\omega)=|H_{xz}(\omega)|^2S_{xx}(\omega)=\frac{k^2}{(k-m\omega^2)^2+(r\omega)^2}S_{xx}(\omega), \tag{3}$$

又因为

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)=0.5g^2\cdot\text{秒/弧度},$$

所以

$$S_{xx}(\omega)=\frac{0.5\,g^2}{\omega^4},$$

$$S_{yy}(\omega)=\frac{g^2}{2\,\omega^4}\,\frac{k^2}{(k-m\omega^2)^2+(r\omega)^2}$$

$$=\frac{g^2}{2}\,\frac{k^2/m^2}{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{r}{m}\omega\right)^2}$$

$$=\frac{g^2}{2}\,\frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\,\xi^2\omega_0^2\omega^2}$$

$$=\frac{g^2}{2}\,\frac{(40\,\pi)^4}{\omega^4[(160\,\pi^2-\omega^2)^2+64\,\pi^2\omega^2]}, \tag{4}$$

式中 $\omega_0=\frac{k}{m}=2\pi f_0$.

(b) 若相对位移响应用 $y(t)$ 表示，则系统振动方程为

$$m\ddot{y}+r\dot{y}+ky=-m\ddot{x}-r\dot{x}. \tag{5}$$

方法 1 记 $f(t)=-m\ddot{x}-r\dot{x}$，称 $f(t)$ 为等效位移激励，若

设

$$f(t)=Ae^{i\omega t},$$

则

$$y=H_{fy}(\omega)\cdot Ae^{i\omega t},$$

代入(5)式，得

$$H_{fy}(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ir\omega},\tag{6}$$

故

$$S_{yy}(\omega)=|H_{fy}(\omega)|^2S_{ff}(\omega).$$

又因为 $f(t)=-m\ddot{x}-r\dot{x}$，所以

$$\begin{aligned}\phi_{ff}(\tau)&=E[f(t)f(t+\tau)]\\&=E\{[-m\ddot{x}(t)-r\dot{x}(t)][-m\ddot{x}(t+\tau)-r\dot{x}(t+\tau)]\}\\&=m^2\phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)+r^2\phi_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)+mr\{E[\ddot{x}(t)\dot{x}(t+\tau)]+\\&\quad+E[\dot{x}(t)\ddot{x}(t+\tau)]\}.\end{aligned}\tag{7}$$

考虑到过程 $\dot{x}[t]$是平稳的，则有

$$E[\dot{x}(t)\dot{x}(t+\tau)]=E[\dot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)],$$

上式两边对 t 求导，得

$$\begin{aligned}E[\dot{x}(t)\ddot{x}(t+\tau)]&=-E[\ddot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)]=\\&-E[\ddot{x}(t)\dot{x}(t+\tau)],\end{aligned}\tag{8}$$

由（8）式，知（7）式右边第三项为零。将（7）式两边进行付里叶变换，得

$$\begin{aligned}S_{ff}(\omega)&=m^2S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)+r^2S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)\\&=m^2\times0.5g^2+r^2\times0.5\,g^2\cdot\frac{1}{\omega^2}\\&=0.5\,g^2\frac{m^2\omega^2+r^2}{\omega^2},\end{aligned}\tag{9}$$

∴

$$S_{yy}(\omega)=0.5\,g^2\frac{m^2\omega^2+r^2}{\omega^2[(k-m\omega^2)^2+(r\omega)^2]}$$

$$=0.5g^2\frac{\omega^2+64\pi^2}{\omega^2[(160\pi^2-\omega^2)^2+64\pi^2\omega^2]}. \qquad (10)$$

方法 2　令（5）式中 $x=Ae^{i\omega t}$，则 $y=H_{xy}(\omega)\cdot A\cdot e^{i\omega t}$，代入（5）式,得

$$H_{xy}(\omega)=\frac{-m\omega^2-i\omega r}{-m\omega^2+k+i\omega r}, \qquad (11)$$

$$\therefore\quad S_{yy}(\omega)=|H_{xy}(\omega)|^2S_{xx}(\omega)$$

$$=\left|\frac{-m\omega^2-i\omega r}{-m\omega^2+k+i\omega r}\right|^2\frac{0.5g^2}{\omega^4}$$

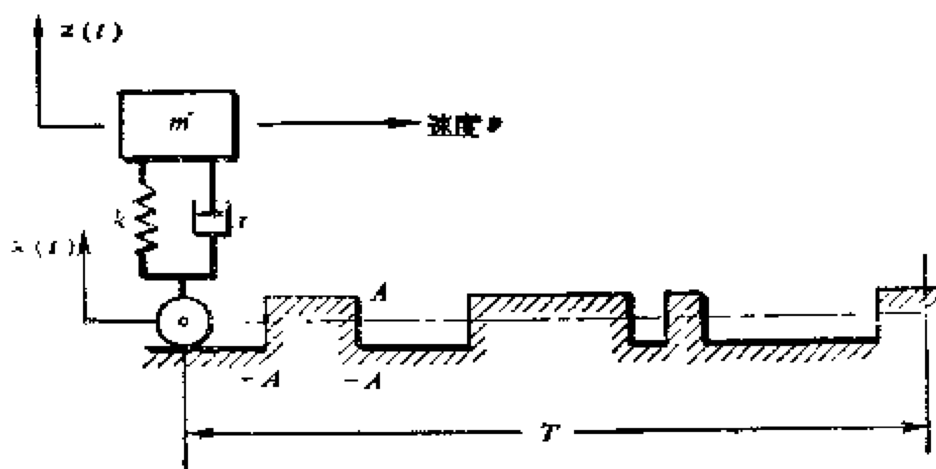
$$=0.5g^2\frac{m^2\omega^2+r^2}{\omega^2[(k-m\omega^2)^2+(r\omega)^2]}, \qquad (12)$$

与（10）式相同。

讨论：由（4）式和（10）式可见，绝对位移响应和相对位移响应的均方值为无穷大，这是因为白噪声激励的均方值为无穷大的缘故。自然，白噪声只是一种理想化的概念，它只有数学意义而无物理意义。

例题 6-8　车辆振动系统行驶在如例题图 6-8-1 所示的特殊的道路模型上，质量 m 的绝对位移为 $z(t)$，路面高低不平度为 $x(t)$，车体垂直振动的微分方程为

$$m\ddot{z}+r\dot{z}+kz=r\dot{x}+kx,$$



例题图 6-8-1

式中 $z(t)$ 与它所处的起始位置有关。若路面不平度由泊桑"车印（Pothole）"过程所描述，即表现为随机电报波形的空间形式，在距离为 d（米）的空间坐标间隔上出现 n 次阶跃的概率是

$$P(\lambda)=P[n:d]=\frac{(\lambda d)^n}{n!}e^{-\lambda d}, \tag{1}$$

式中，λ 为单位长度上出现的阶跃个数，$n=0, 1, 2, \cdots, \infty$。假定车辆在地面上是按 $x(t)$ 的变化规律上下跳跃。求质量 m 的绝对位移 z 的方差 $D[z]$。

解：(1) 系统的频率响应函数

由一般振动书籍均可知位移激励 $x(t)$ 引起绝对位移响应的频率响应函数为

$$H_{xz}(f)=\frac{r(i2\pi f)+k}{m(i2\pi f)^2+r(i2\pi f)+k}.$$

(2) 激励的分布

由于激励 $x(t)$ 是一个随机电报波形，因而每秒钟跳跃次数由水平速度 v 决定，即

$$E[\text{跳跃数/秒}]=E[\text{跳跃数/米}]\cdot v=\lambda v,$$

所以

$$P[n,T]=P[\text{在时间 } T \text{ 内跳跃 } n \text{ 次}]$$

$$=\frac{(\lambda vT)^n}{n!}e^{-\lambda vT} \quad (n=0,1,2,\cdots\infty). \tag{2}$$

(3) 激励的自相关和自谱

$$\phi_{xx}(\tau)=E[x_k(t)x_k(t+\tau)],$$

$x_k[t]$的正负号在区间 $(t, t+\tau)$ 内是随机变化的，而且与时间无关，平均密度为 λv。由 (2) 式知，$x_k[t]$ 在 $(t, t+\tau)$ 内符号变化 n 次的概率为

$$P\{x_k[t]\text{在 } (t, t+\tau) \text{ 内变号 } n \text{ 次}\}=P(n, |\tau|)$$

$$=\frac{(\lambda v|\tau|)^n}{n!}e^{-\lambda v|\tau|}, \tag{3}$$

上式中，τ 加了绝对值记号，是考虑到 τ 可能取负值。

若 $x_k(t)$ 与 $x_k(t+\tau)$ 同号，则 $x_k(t)x_k(t+\tau)=A^2$；若两者异号，则 $x_k(t)x_k(t+\tau)=-A^2$。同号的概率为 $P(0,\ |\tau|)+P(2,\ |\tau|)+P(4,\ |\tau|)+\cdots$ 异号的概率为 $P(1,\ |\tau|)+P(3,\ |\tau|)+P(5,\ |\tau|)+\cdots$，于是有

$$\phi_{xx}(\tau)=E[x_k(t)x_k(t+\tau)]=A^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nP(n,|\tau|)$$

$$=A^2e^{-\lambda v|\tau|}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda v|\tau|)^n}{n!},$$

若将上式中的求和号展开，就是 $e^{-\lambda v|\tau|}$ 的幂级数，

$$\therefore \qquad \phi_{xx}(\tau)=A^2e^{-2\lambda v|\tau|}, \tag{4}$$

上式的付里叶变换为

$$S_{x_1x_1}(f)=\frac{4\lambda vA^2}{(2\pi f)^2+(2\lambda v)^2}, \tag{5}$$

(4) 响应的自谱

$$S_{zz}(f)=\left|\frac{r(i2\pi f)+k}{m(i2\pi f)^2+r(i2\pi f)+k}\right|^2\times$$

$$\times\left(\frac{4\lambda vA^2}{(2\pi f)^2+(2\lambda v)^2}\right), \tag{6}$$

(5) 响应的方差

因为 $E[x]=0$，所以 $E[z]=0$，则

$$D[z]=E[z^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{zz}(f)df$$

$$=4\lambda vA^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{r(i2\pi f)+k}{m(i2\pi f)^2+r(i2\pi f)+k}\right|^2\times$$

$$\times\left|\frac{1}{i2\pi f+2\lambda v}\right|^2df$$

$$=\frac{4\lambda vA^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{r(i2\pi f)}{m(i2\pi f)^3+(r+2\lambda vm)(i2\pi f)^2}\right.\rightarrow$$

$$\left. \frac{+k}{+(2r\lambda v^2+k)i2\pi f+2\lambda vk} \right|^2 d(2\pi f).$$

查表（见附录8），现为 $n=3$ 的情况：

$$A_0=2\lambda vk,\quad A_1=2r\lambda v+k,\quad A_2=r+2\lambda vm$$

$$A_3=m,\quad B_0=k,\quad B_1=r,B_2=B_3=0.$$

$$\therefore\quad I_3=\frac{\pi\{-A_0A_3B_1^2-A_2A_3B_0^2\}}{A_0A_3(A_0A_3-A_1A_2)}$$

$$=\frac{\pi\left(B_1^2+\frac{A_2}{A_0}B_0^2\right)}{(A_1A_2-A_0A_3)}$$

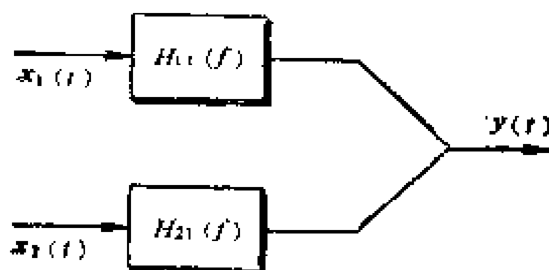
$$=\frac{\pi\left(r^2+\frac{r+2\lambda vm}{2\lambda vk}k^2\right)}{(2r\lambda v+k)(r+2\lambda vm)-2\lambda vkm}$$

$$=\frac{\pi r\left[2\lambda v\left(r+\frac{mk}{r}\right)+k\right]}{2\lambda vr[2\lambda v(r+2\lambda vm)+k]},$$

$$\therefore\quad D[z]=4\lambda vA^2\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi\left[2\lambda v\left(r+\frac{mk}{r}\right)+k\right]}{2\lambda v[2\lambda v(r+2\lambda vm)+k]}$$

$$=\frac{A^2\left[2\lambda v\left(r+\frac{mk}{r}\right)+k\right]}{2\lambda v(r+2\lambda vm)+k}. \tag{7}$$

例题 6-9 已知图示系统的两个传递通道的频率响应函数分别为



例题图 6-9-1

$$H_{11}(f)=\frac{2}{5+if},$$

$$H_{21}(f)=\frac{3}{5+if}.$$

若输入满足 $\phi_{x_1x_1}(\tau)=6\delta(\tau)$，$\phi_{x_2x_2}(\tau)=6\delta(\tau)$，单边谱$W_{x_1x_1}(f)$

$=12$ 厘米^2/赫，$W_{x_1x_2}(f)=8$ 厘米^2/赫，求：(a) $\gamma_{x_1x_2}{}^2(f)$；(b) $\phi_{yy}(\tau)$ 和 $S_{yy}(f)$；(c) $\phi_{x_1y}(\tau)$ 和 $S_{x_1y}(f)$；(d) $\gamma^2{}_{x_1y}(f)$。

解：(a) 应用公式

$$\gamma_{x_1}{}^2{}_{x_2}(f)=\frac{|W_{x_1x_2}(f)|^2}{W_{x_1x_1}(f)W_{x_2x_2}(f)}, \tag{1}$$

由于输入 x_1 和 x_2 的自相关函数完全相同，故应有相同的自功率谱密度函数，即

$$W_{x_1x_1}(f)=W_{x_2x_2}(f)=12 \text{ 厘米}^2/\text{赫}.$$

将已知数据代人 (1) 式，得

$$\gamma_{x_1x_2}^2(f)=\frac{8^2}{12\times 12}=0.444.$$

(b) 应用公式 (6-22)：

$$S_{yy}(f)=H_{11}{}^*(f)\cdot H_{11}(f)S_{x_1x_1}(f)+H_{21}{}^*(f)H_{11}(f)\times S_{x_2x_1}(f)+H_{11}{}^*(f)H_{21}(f)\cdot S_{x_1x_2}(f)+H_{21}{}^*(f)H_{21}(f)\times S_{x_1x_2}(f)$$

$$=\frac{1}{5^2+f^2}\left[2^2\times\frac{12}{2}+2\times 3\times\frac{8}{2}\times 2+3^2\times\frac{12}{2}\right]=\frac{126}{5^2+f^2},$$

式中应用了关系式 $S_{x_1x_1}(f)=S_{x_2x_2}(f)=\frac{1}{2}W_{x_1x_2}(f)$ 及 $S_{x_2x_1}(f)=S_{x_1x_2}^*(f)=S_{x_1x_2}(f)=\frac{1}{2}W_{x_1x_2}(f)$。将 (2) 式进行逆付里叶变换，得

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=126\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi f\tau}}{5^2+f^2}df.$$

经过查付里叶变换表，得

$$\phi_{yy}(\tau)=\frac{126}{2\times 5}e^{-5|\tau|}=12.6\,e^{-5|\tau|}. \tag{3}$$

(c) 应用公式

$$S_{x_1y}(f)=H_{11}(f)S_{x_1x_1}(f)+H_{21}(f)S_{x_1x_2}(f)$$

$$=\frac{1}{5+if}\left[2\times\frac{12}{2}+3\times\frac{8}{2}\right]=\frac{24}{5+if}, \qquad (4)$$

$$\phi_{x_1y}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{x_1y}(f)e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24}{5+if}e^{i2\pi f\tau}df$$

$$=24\,e^{-5\tau} \qquad (\tau\geqslant 0).$$

(d) 应用公式

$$\gamma_{x_1y}^2(f)=\frac{|S_{x_1y}(f)|^2}{S_{x_1x_1}(f)S_{yy}(f)}$$

$$=\frac{\dfrac{24^2}{5^2+f^2}}{\dfrac{12}{2}\times\dfrac{126}{5^2+f^2}}=0.762.$$

讨论：(1) 从 $\gamma_{x_1x_2}^2(f)=0.444$ 可见，输入 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 是不太相关的，$x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 之间的传递不太可信，$x_1(t)$ 到 $x_2(t)$ 之间的联系不是线性的。

(2) 从 $\gamma_{x_1y}^2=0.762$ 可见，输入 $x_1(t)$ 与输出 $y(t)$ 之间是比较相关的，它们之间的传递是较可信的，这一传递通道较接近线性。

(3) 两输入的例子在实际中常可看到，例如汽车、拖拉机的前桥受左右轮的两个输入；自行车、摩托车这类两轮车受前后轮的两个输入。其它系统也有许多两输入的实例。

(4) 类似地，还可求得

$$S_{x_2y}(f)=H_{11}(f)S_{x_2x_1}(f)+H_{21}(f)S_{x_2x_2}(f)$$

$$=\frac{1}{5+if}\left[2\times\frac{8}{2}+3\times\frac{12}{2}\right]=\frac{26}{5+if},$$

$$\phi_{x_2y}(\tau)=26\,e^{-5\tau} \qquad (\tau\geqslant 0),$$

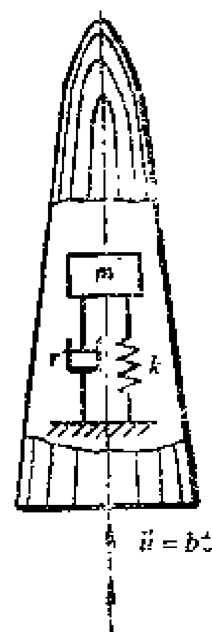
$$\gamma^2_{x_2y}(f)=\frac{|S_{x_2y}(f)|^2}{S_{x_2x_2}(f)S_{yy}(f)}=\frac{\frac{26^2}{5^2+f^2}}{\frac{12}{2}\times\frac{126}{5^2+f^2}}=0.894.$$

说明输入 $x_2(t)$ 和响应 $y(t)$ 之间比 $x_1(t)$ 和 $y(t)$ 之间更相关，它们之间的传递更可信，这一传递通道更接近线性。同时说明 $x_2(t)$ 所引起的响应在 $y(t)$ 中所占的比重比 $x_1(t)$ 大。

例题 6-10 火箭从静止起飞（垂直地面方向），它的加速度随时间线性增大，即 $\ddot{u}=bt$，这里 b 是常数，火箭的头部内装有测试仪器，为了防振，在仪器底部装有减振器。设仪器质量为 m，减振器的总阻尼比 $\zeta=0.1$，弹簧刚度为 k，试求：

(a) 仪器箱的绝对加速度与时间的关系；

(b) 当火箭发动机停机后，火箭受稀薄大气湍流的白噪声激励 $f[t]$，$S_{ff}(\omega)=S_0$，此时仪器箱的位移响应的均值、均方值、自功率谱密度函数，速度响应的均值、均方值和自谱。



例题图 6-10-1

解：以仪器为研究对象，进行受力分析和运动分析，设 z 为仪器的绝对坐标，则振动微分方程为

$$m\ddot{z}=-k(z-u)-2\zeta m\sqrt{\frac{k}{m}}(\dot{z}-\dot{u}), \tag{1}$$

或应用相对坐标 $y=z-u$，则运动微分方程为

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_0\dot{y}+\omega_0^2y=-\ddot{u}=-bt, \tag{2}$$

式中 $\omega_0=\sqrt{k/m}$。火箭由静止起飞，初始条件为 $z_0=0$，$\dot{z}_0=0$，当然也有 $y_0=0$，$\dot{y}_0=0$，方程(2)的解可应用杜哈曼积分写出，即

$$y=-\frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_d}\int_0^t(-bt')e^{+\zeta\omega_0 t'}\sin\omega_d(t-t')dt'. \tag{3}$$

这里 $\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0$，为有阻尼的固有频率，或

$$y=-\frac{be^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_d}\int_0^t t'e^{\zeta\omega_0 t'}\sin\omega_d(t-t')dt', \tag{4}$$

对(4)式求导二次，得

$$\ddot{y}=-bt+2\zeta\omega_0 be^{-\zeta\omega_0 t}\int_0^t t'e^{\zeta\omega_0 t'}\cos\omega_d(t-t')dt'+$$

$$+\frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}b\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\int_0^t t'e^{\zeta\omega_0 t'}\sin\omega_d(t-t')dt'. \tag{5}$$

(a) 由于仪器箱的绝对加速度为 $\ddot{z}=\ddot{u}+\ddot{y}$，所以

$$\ddot{z}=2\zeta\omega_0 be^{-\zeta\omega_0 t}\int_0^t t'e^{\zeta\omega_0 t'}\cos\omega_d(t-t')dt'+$$

$$+\frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}b\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\int_0^t t'e^{\zeta\omega_0 t'}\sin\omega_d(t-t')dt'. \tag{6}$$

(b) 当火箭发动机停机后，火箭受大气湍流的位移白噪声激励，则

$$m\ddot{z}=-k(z-f)-2\zeta\sqrt{mk}(\dot{z}-\dot{f}),$$

或
$$\ddot{z}+2\zeta\omega_0\dot{z}+\omega_0^2 z=\omega_0^2 f+2\zeta\omega_0\dot{f}, \tag{7}$$

令(7)式中 $f(t)=\delta(t)$，并在两边从 0_- 到 0_+ 区间积分，得脉冲响应函数

$$h_{fz}(t)=e^{-\zeta\omega_0 t}\left[2\zeta\omega_0\cos\omega_d t+\frac{1-2\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_0\sin\omega_d t\right], \tag{8}$$

则绝对位移响应

$$z(t)=\int_{-\infty}^t h_{fz}(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{9}$$

$$H_{fz}(\omega)=\frac{\omega_0^2+i2\zeta\omega_0\omega}{-\omega^2+i2\zeta\omega_0\omega+\omega_0^2}=\frac{1+i2\zeta\omega/\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2+i2\zeta(\omega/\omega_0)}. \tag{10}$$

所以响应谱

$$S_{zz}(\omega)=|H_{fz}(\omega)|^2 S_{ff}(\omega)=\frac{1+4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}{\left[1-(\omega/\omega_0)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\omega/\omega_0\right)^2}S_0. \tag{11}$$

绝对位移响应的数学期望和均方值

$$E[z]=\sqrt{\int_{0-}^{0+}S_{zz}(\omega)d\omega}=0,$$

$$E[z^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{zz}(\omega)dz=\frac{1+4\zeta^2}{2\zeta}\pi\omega_0 S_0.$$

绝对速度响应的自谱

$$S_{\dot{z}\dot{z}}(\omega)=\omega^2 S_{zz}(\omega)=\frac{\omega^2+\left(\frac{2\zeta}{\omega_0}\right)^2\omega^4}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}S_0.$$

绝对速度响应的均值和均方值

$$E[\dot{z}]=0,$$

$$E[\dot{z}^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\dot{z}\dot{z}}(\omega)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2+\left(\frac{2\zeta}{\omega_0}\right)^2\omega^4}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}S_0 d\omega$$

$$=\infty.$$

例题 6-11 单自由度系统的运动微分方程为：

$$m\ddot{y}+r\dot{y}+ky=x(t),$$

随机激励 $x[t]$是均值为零的正态平稳过程，在以 $\pm\omega_0$ 为中心的两个频率带宽内具有不变的自功率谱密度 S_0，这里 $\omega=\sqrt{k/m}$ 为系统固有圆频率。系统的阻尼比 $\zeta<0.1$，求：

(a) 位移响应的均值 $E[y]$，均方值 $E[y^2]$，概率密度函数

$p(y)$，自功率谱密度 $S_{yy}(\omega)$；

(b) 速度响应的均值 $E[\dot{y}]$，均方值 $E[\dot{y}^2]$，自功率谱密度 $S_{\dot{y}\dot{y}}(\omega)$；

(c) y 和 $\dot{y}$ 乘积的集合平均值 $E[y\dot{y}]$ 以及它们的联合概率密度函数 $p(y,\dot{y})$；

(d) $y(t)$ 的极大值的概率密度函数；

(e) 若过程的持续时间为 T，求 $y(t)$ 最大值的平均值；

(f) $y(t)$ 最大值的标准离差。

解：(a) 令 $x(t)=e^{i\omega t}$，$y(t)=H(\omega)e^{i\omega t}$，可求得系统的频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{1}{-m\omega^2+ri\omega+k}, \tag{1}$$

于是

$$E[y]=E[x]\cdot H(0)=0, \tag{2}$$

激励谱和响应谱之间的关系为：

$$S_{yy}(\omega)=|H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega). \tag{3}$$

由于题给系统的阻尼很小($\zeta<0.1$)，故 $|H(\omega)^2|$ 在系统的自振频率 ω_0 处的峰值很高，响应必然是一个窄带过程，即响应自功率谱曲线下的面积特别集中在 ω_0 附近，响应主要是由输入过程 $x(t)$ 中那些接近于 ω_0 的频率分量所引起的。现在，输入 $x(t)$ 虽不是白噪声，但在 ω_0 附近是常数 S_0，故若将 $x(t)$ 看作白噪声过程，引起的误差不大，于是

$$S_{yy}(\omega)\doteq S_0\left|\frac{1}{-m\omega^2+ri\omega+k}\right|^2, \tag{4}$$

均方值 $E[y^2]$ 应等于响应谱曲线下的面积

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(\omega)\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\left|\frac{1}{-m\omega^2+ri\omega+k}\right|^2 d\omega, \tag{5}$$

上述积分值可从附录 8 中查到。当

$$H(\omega)=\frac{B_0+i\omega B_1}{A_0+i\omega A_1+\omega^2 A_2} \tag{6}$$

时，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi(A_0B_1^2+A_2B_0^2)}{A_0A_1A_2}. \tag{7}$$

对于(5)式，$B_0=1$，$B_1=0$，$A_0=k$，$A_1=r$，$A_2=m$，所以

$$E[y^2]=\frac{\pi S_0}{kr}, \tag{8}$$

因 $E[y]=0$，故

$$\sigma_{y^2}=E[y^2]=\frac{\pi S_0}{kr}. \tag{9}$$

因为系统是线性的，激励是正态的，根据正态过程的线性迭加仍为正态过程这一原理，可知响应 y 必服从正态分布，其概率密度函数为

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\exp[-y^2/2\sigma_{y^2}], \tag{10}$$

式中，σ_{y^2} 已由(9)式给出。

(b) $E[\dot{y}]=H_{xy}(0)\cdot E[x]$,

式中，$H_{xy}(0)$ 为激励是 $x(t)$，响应是 $\dot{y}(t)$ 的频率响应函数 $H_{x\dot{y}}(\omega)$ 当 $\omega=0$ 时的值，但不管其为何值，因 $E[x]=0$，故 $E[\dot{y}]=0$。

又

$$S_{\dot{y}\dot{y}}(\omega)=\omega^2 S_{yy}(\omega)=S_0\omega^2\left|\frac{1}{-m\omega^2+ri\omega+k}\right|^2, \tag{12}$$

故

$$E[\dot{y}^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\dot{y}\dot{y}}(\omega)\,d\omega=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{i\omega}{-m\omega^2+ir\omega+k}\right|^2 d\omega, \tag{13}$$

与(b)式比较，现在 $B_0=0$，$B_1=1$，A_0，A_1，A_2 同前，于是

$$E[\dot{y}^2]=\frac{\pi S_0}{rm}, \tag{14}$$

$$\sigma_{\dot{y}^2}=E[\dot{y}^2]=\frac{\pi S_0}{rm}. \tag{15}$$

(c) $E[y\dot{y}]=\left[\frac{d}{d\tau}\phi_{yy}(\tau)\right]_{\tau=0}=$

$$\left[\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\right]_{\tau=0} = i\int_{-\infty}^{\infty}\omega S_{yy}(\omega)d\omega. \tag{16}$$

因为 $S_{yy}(\omega)$是 ω 的偶函数，$\omega S_{yy}(\omega)$是 ω 的奇函数，故上述积分为零，由此得

$$E[y\dot{y}]=0. \tag{17}$$

上式说明，任何一个平稳随机过程都与其导出过程不相关。

y 与 $\dot{y}$ 应服从二维正态分布，即

$$p(y,\ \dot{y})=\frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{\dot{y}}\sqrt{1-\rho_{y\dot{y}}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{y\dot{y}}^2)}\left[\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_{y^2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\rho_{y\dot{y}}(y-m_y)(\dot{y}-m_{\dot{y}})}{\sigma_y\sigma_{\dot{y}}}+\frac{(\dot{y}-m_{\dot{y}})^2}{\sigma_{\dot{y}^2}}\right]\right\}, \tag{18}$$

上式中，已求得 $m_y=m_{\dot{y}}=0$，σ_y，$\sigma_{\dot{y}}$ 分别如(9)、(15)式所示，而

$$\rho_{y\dot{y}}=\frac{E[y\dot{y}]}{\sigma_y\sigma_{\dot{y}}}=0, \tag{19}$$

故(18)式简化为：

$$p(y,\dot{y})=\frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{\dot{y}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma_y^2}+\frac{\dot{y}^2}{\sigma_{\dot{y}}^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{y}}}\exp\left[-\frac{\dot{y}^2}{2\sigma_{\dot{y}}^2}\right]$$

$$=p(y)\cdot p(\dot{y}). \tag{20}$$

上式也说明，y 与 $\dot{y}$ 是统计独立的。

（d）最大值的概率密度函数按下式计算：

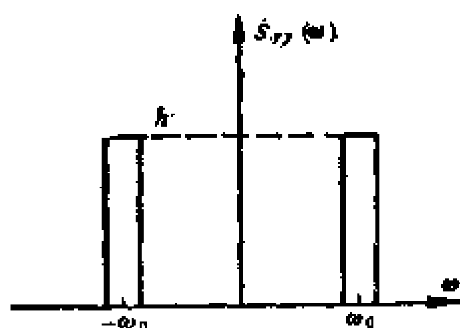
$$p(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varepsilon e^{-\rho^2/2\varepsilon^2}+\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\,\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{[\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}]/\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right], \tag{21}$$

式中 $\rho=y/\sqrt{m_0}$ 为极大值的无量纲形式。

$$m_n=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n S_{uu}(\omega)d\omega \qquad (n=0,1,2,\cdots), \tag{22}$$

$$\varepsilon^2 \approx \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}. \qquad (23)$$



例题图 6-11-1

由于所研究系统的阻尼很小，其响应谱的频带很窄而峰很高，可以用两个矩形来近似（例题图 6-11-1），应用积分中值定理，(22)式也可以作如下近似：

$$m_n \doteq \omega_0^n h \cdot \Delta\omega. \qquad (24)$$

由(23)式知，此时 $\varepsilon \to 0$，于是(21)式简化为

$$p(\rho) = \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}. \qquad (25)$$

(e) 最大值的平均值近似为

$$\rho_e \doteq \sqrt{2 \ln \nu T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln \nu T}}, \qquad (26)$$

式中 $\gamma = 0.5772$ 为欧拉常数，T 为过程持续时间。

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \doteq \frac{\omega_0}{2\pi}, \qquad (27)$$

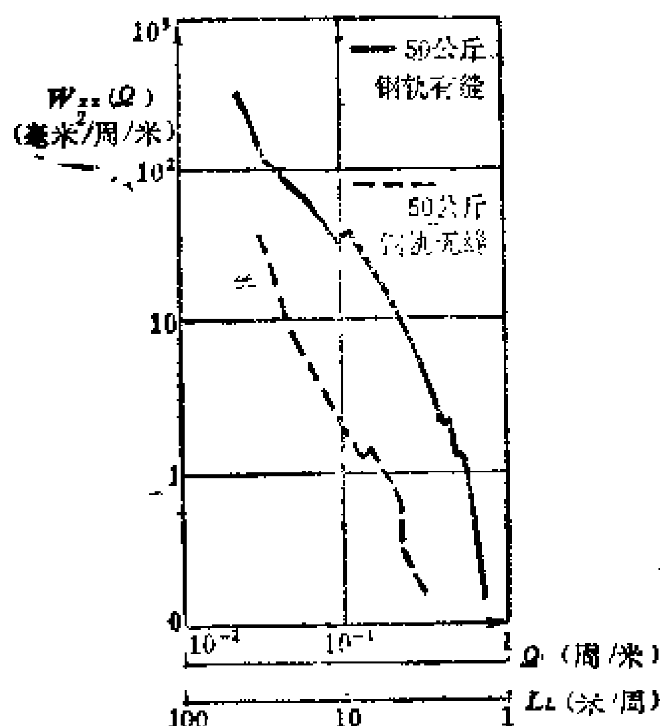
(f) 最大值的标准离差为

$$\sigma_{\rho_e} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2 \ln \nu T}}. \qquad (28)$$

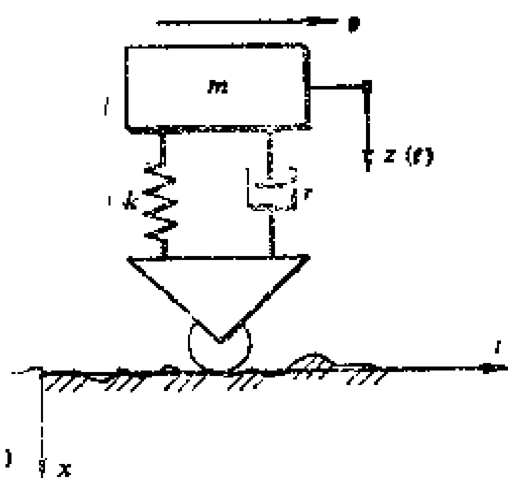
式中 ν 与 T 的意义与(26)式相同。

例题 6-12 轨道对车辆激励的自谱如图 6-12-1 所示，各国实测结果也都彼此相近。车辆振动系统的简化模型见图 6-12-2，已知该系统的固有频率 $f_n = 1.2$ 赫，阻尼比 $\xi = 0.2$，车辆行驶速度 v 为 100 公里/小时，试用近似法计算系统绝对加速度响应 $\ddot{z}$ 的均方根值。

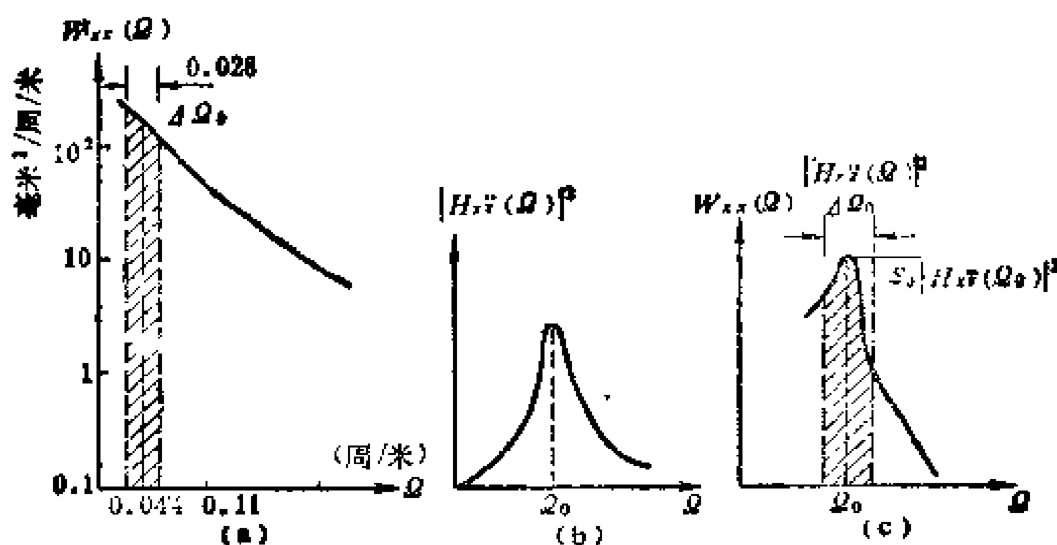
解：由例题图 6-12-1 可见，轨道的路面谱不是白噪声，长波(即低频)的激励能量大，短波的激励能量小。且激励的自谱与



例题图 6-12-1



例题图 6-12-2



例题图 6-12-3

轨道的构造和养护状态有关，无缝轨道具有显著的优越性。

例题图 6-12-3(a)为例题图 6-12-1 所示轨道的路面谱，但其横坐标由直角坐标代替了对数坐标，图中激励自谱密度的单位用(轨道的挠度)^2/(轨迹每米长的周波数)表示，横坐标还是用轨道

激励的每米周数和波长两种表示，前者又称空间频率，记作Ω。振动系统的频率响应函数 $|H_{x\ddot{z}}(\Omega)|^2$ 曲线见例题图 6-12-3(b)，而例题图 6-12-3(c)则为$|H_{x\ddot{z}}(\Omega)|^2$与$W_{xx}(\Omega)$乘积的曲线，在共振频率处，即$\Omega=\Omega_0$时的$W_{xx}(\Omega)$记作$W_{xx}(\Omega_0)$。现在在共振峰附近选定一适当的频带宽度$\Delta\Omega_0$（称作均方带宽），使矩形面积$W_{xx}(\Omega_0)\cdot|H_{x\ddot{z}}(\Omega_0)|^2\cdot\Delta\Omega_0$和$|H_{x\ddot{z}}(\Omega)|^2\cdot W_{xx}(\Omega)$曲线下的阴影面积相等，这时，车体加速度响应的均方值可由下式计算：

$$E[\ddot{z}^2]=\int_0^\infty W_{\ddot{z}\ddot{z}}(\Omega)d\Omega=\int_0^\infty|H_{x\ddot{z}}(\Omega)|^2W_{xx}(\Omega)d\Omega$$

$$=|H_{x\ddot{z}}(\Omega_0)|^2W_{xx}(\Omega_0)\Delta\Omega_0 \quad (1)$$

乘积$W_{xx}(\Omega_0)\Delta\Omega_0$表示对应于频带宽$\Delta\Omega_0$的频率分量所引起的挠度均方值．即

$$E[x^2]_{\Delta\Omega_0}=W_{xx}(\Omega_0)\cdot\Delta\Omega_0, \quad (2)$$

于是有

$$E[\ddot{z}^2]=|H_{x\ddot{z}}(\Omega_0)|^2E[x^2]_{\Delta\Omega_0}. \quad (3)$$

上式说明振体加速度均方值可由$|H_{x\ddot{z}}\Omega|^2$的峰值和均方带宽$\Delta\Omega_0$内挠度均方值的乘积来表示。

在小阻尼情况下，$\Delta\Omega_0=\pi\xi\Omega_0$，式中$\xi$为阻尼比。

本题已知速度时，若系统共振轨道的波长为L_t，相应的周波数(又称空间频率)Ω为

$$L_t=\frac{v}{f_n}=\frac{100\times10^3}{60\times60\times1.2}=23.15(\text{米/周}),$$

或

$$\Omega_0=\frac{1}{23.15}=0.0432(\text{周/米}),$$

半功率带宽

$$\Delta\Omega_0=\pi\xi\Omega_0=\pi\times0.2\times0.0432=0.027(\text{周/米}).$$

例题图 6-12-3(a)中对应于 0.0432(周/米)处的$W_{xx}(\Omega)$值为 70 (毫米)^2/米/周，所以激起共振区响应的轨道挠度均方值为．

$$E[x^2]_{\Delta\Omega_0}=70\times0.027=1.89(\text{毫米})^2.$$

而

$$|H_{x\ddot{x}}(\Omega)|^2=\Omega^4\frac{1+4\zeta^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2+4\zeta^2\lambda^2},$$

式中 $\lambda=\Omega/\Omega_0$，当 $\Omega=\Omega_0$ 时，有

$$|H_{x\ddot{x}}(\Omega_0)|^2=\frac{\Omega_0^4(1+4\zeta^2)}{4\zeta^2},$$

再代入(3)式计算车体振动加速度的均方根值为

$$\sqrt{E[\ddot{x}^2]}=\sqrt{|H_{x\ddot{x}}(\Omega_0)|^2E[x^2]_{\Omega_0}}$$

$$=\Omega_0^2\sqrt{\frac{1+4\zeta^2}{4\zeta^2}\cdot E[x^2]_{\Omega_0}}$$

$$=(2\pi\times1.2)^2\times\sqrt{\frac{1+4\times(0.2)^2}{4\times(0.2)^2}\times1.89}$$

$$=210.44(\text{毫米/秒}^2)=0.022(g).$$

注意，为了直接得到通常使用的加速度单位，上式中的 Ω_0 又需转化为时间频率 ω_0 代入。

讨论：(1) 由以上计算过程可见，车辆受轨道随机激励时的振动响应计算，与把轨道激励看作周期性时的响应计算颇有相似之处，所不同的是前者的输入和输出都用均方根值来表示，而后者用稳态振动的幅值来表示。

(2) 从人体承受曲线图(见附录6)可看出，当加速度均方根值小于 0.2 g 时，人在这种车体环境中可以承受 8 小时以上，也不至因振动而疲劳。因此车体的悬挂设计(即 k、r 的选择)是优良的。

例题 6-13 若例题 1-9 中图所示系统受随机力 $f(t)$ 的作用，激励谱 $S_{ff}(\omega)=\dfrac{S}{\left(1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$，求绝对位移响应 x_1 的自功率谱密度和均方值。

解：令例题1-9中(5)式里的 $S=i\omega$，即得 $f(t)$ 引起响应 $x_1(t)$ 的频率响应函数：

$$H_{fx_1}(\omega)=\frac{k_2+ir\omega}{k_1k_2+(k_1+k_2)ir\omega}, \tag{1}$$

$x_1(t)$ 的自谱为

$$\begin{aligned}S_{x_1x_1}(\omega)&=|H_{fx_1}(\omega)|^2S_{ff}(\omega)\\&=\frac{k_2^2+(r\omega)^2}{(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2r^2\omega^2}\cdot\frac{S_0}{1+\omega^2/\omega_0^2},\end{aligned} \tag{2}$$

$x_1(t)$ 的均方值

$$\begin{aligned}E[x_1^2]&=\int_{-\infty}^{\infty}S_{x_1x_1}(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{fx_1}(\omega)|^2S_{ff}(\omega)d\omega\\&=\omega_0^2S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{k_2+ir\omega}{k_1k_2+(k_1+k_2)ir\omega}\right|^2\cdot\left|\frac{1}{\omega_0+i\omega}\right|^2d\omega\\&=\omega_0^2S_0\int_{-\infty}^{\infty}|(k_2+ir\omega)/\{-\omega^2r(k_1+k_2)+\\&\quad+[k_1k_2+(k_1+k_2)r\omega_0]i\omega+k_1k_2\omega_0\}|^2d\omega.\end{aligned} \tag{3}$$

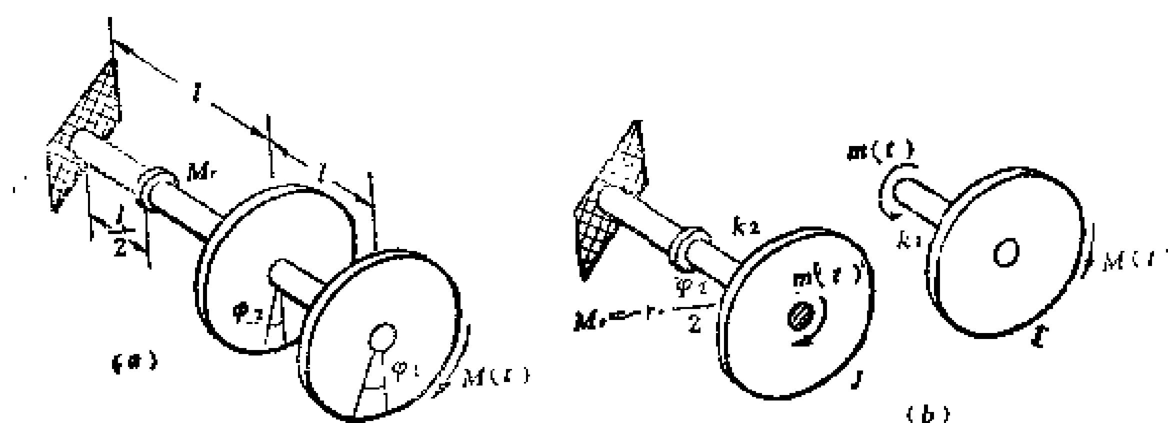
查附录8的积分表，这里 $n=2$，且 $A_0=k_1k_2\omega_0$，$A_1=k_1k_2+(k_1+k_2)r\omega_0$，$A_2=(k_1+k_2)r$，$B_0=k_2$，$B_1=r$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad E[x_1^2]&=\omega_0^2S_0\frac{\pi(A_0B_1^2+A_2B_0^2)}{A_0A_1A_2}\\&=\omega_0^2S_0\frac{\pi\{k_1k_2\omega_0r^2+(k_1+k_2)rk_2^2\}}{k_1k_2\omega_0[k_1k_2+(k_1+k_2)r\omega_0](k_1+k_2)r}\\&=\frac{\pi S_0\omega_0[k_1k_2\omega_0r+(k_1+k_2)k_2^2]}{k_1k_2(k_1+k_2)[k_1k_2+(k_1+k_2)r\omega_0]}.\end{aligned} \tag{4}$$

例题 6-14 等直径圆盘扭转轴系统，如例题图6-14-1(a)所示，已知每个圆盘的转动惯量为 J、轴的剪切弹性模量为 G，在第一圆盘上作用着随机白噪声力矩 $M(t)$，其自谱是 $S_{MM}(\omega)=S_0$，在离固定端 $l/2$ 处有阻尼力矩 $M_r=-r\dot{\varphi}$，求第二圆盘绝对角位移 φ_2 的自功率谱密度函数、自相关函数和均方值。

解：本题为两自由度扭转振动系统，输入是一个，也只求一个输出。设扭转轴直径为 d，取广义坐标 φ_1 和 φ_2。分两段进行受力分析，见例题图 6-14-1(b)。应用动力学转动方程得，

$$J\ddot{\varphi}_1 = M(t) - m(t), \tag{1}$$



例题图 6-14-1

$$J\ddot{\varphi}_2 = m(t) - k_2\varphi_2 - r\left(\frac{\dot{\varphi}_2}{2}\right). \tag{2}$$

其中 $m(t) = k_1(\varphi_1 - \varphi_2)$，经整理得

$$\left.\begin{aligned} &J\ddot{\varphi}_1 - k_1\varphi_1 - k_1\varphi_2 = M(t), \\ &J\ddot{\varphi}_2 + \frac{r}{2}\dot{\varphi}_2 - k_1\varphi_1 + (k_1+k_2)\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

为了求第一圆盘上作用的力矩激励，引起第二圆盘上角位移响应的频率响应函数，先设

$$M(t) = M_0 e^{i\omega t},$$

则

$$\varphi_2 = H_{M\varphi_1}(\omega) M_0 e^{i\omega t},$$

$$\varphi_1 = H_{M\varphi_1}(\omega) M_0 e^{i\omega t},$$

代入(3)式，得

$$\begin{cases} H_{M\varphi_1}(\omega)(-J\omega^2 + k_1) - H_{M\varphi_2}(\omega)k_1 = 1, \\ H_{M\varphi_2}(\omega)\left(-J\omega^2 + \frac{r}{2}i\omega + k_1 + k_2\right) - k_1 H_{M\varphi_1}(\omega) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

解上式并考虑到

$$k_1=k_2=\frac{GJ_p}{l}=\frac{\pi d^4 G}{32\,l}=k,$$

式中 J_p 为轴的极惯矩，此时(4)式又可以写成下式：

$$H_{M\varphi_1}(\omega)=\frac{-J\omega^2+\frac{r}{2}i\omega+2k}{-k^2+(k-J\omega^2)(2k-J\omega^2)+i\frac{r\omega}{2}(k-J\omega^2)},\tag{5}$$

$$H_{M\varphi_2}(\omega)=\frac{k}{-k^2+(k-J\omega^2)(2k-J\omega^2)+i\frac{r\omega}{2}(k-J\omega^2)},\tag{6}$$

$$\begin{aligned}S_{\varphi_2\varphi_2}(\omega)&=|H_{M\varphi_2}(\omega)|^2 S_{MM}(\omega)\\&=\frac{k^2S_0}{[k^2-3kJ\omega^2+(J\omega^2)^2]^2+\left[\frac{r\omega}{2}(k-J\omega^2)\right]^2}.\end{aligned}\tag{7}$$

第二个圆盘角位移的自相关函数为

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi_2\varphi_2}(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varphi_2\varphi_2}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\\&=2\int_0^{\infty}\frac{k^2S_0\cos\omega\tau}{(k^2-3kJ\omega^2+J^2\omega^4)^2+\frac{r^2\omega^2}{4}(k-J\omega_2)^2}d\omega.\end{aligned}\quad(8$$

均方值为

$$\begin{aligned}E[\varphi_2^2]&=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varphi_2\varphi_2}(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{M\varphi_1}(\omega)|^2S_{MM}(\omega)d\omega\\&=k^2S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{J^2\omega^4-\frac{rJ}{2}i\omega^3-3kJ\omega^2+\frac{rk}{2}i\omega+k^2}\right|^2d\omega,\end{aligned}$$

查附录 8，现 $n=4$，且 $A_0=k^2$，$A_1=\frac{rk}{2}$，$A_2=3kJ$，$A_3=\frac{rJ}{2}$，

$A_4=J^2$，$B_0=1$，$B_1=B_2=B_3=0$，

$$\therefore \quad I_4=\frac{\pi B_0^2(A_1A_4-A_2A_3)}{A_0(A_0A_3^2+A_1^2A_4-A_1A_2A_3)}$$

$$=\frac{\pi\left(\frac{rk}{2}J^2-\frac{3}{2}rkJ^2\right)}{k^2\left\{k^2\frac{r^2J^2}{4}+\frac{r^2k^2}{4}J^2-\frac{rk}{2}\cdot 3kJ\cdot\frac{rJ}{2}\right\}}$$

$$=\frac{4\pi}{k^3r},$$

$$\therefore \qquad E[\varphi_2^2]=k^2S_0I_4=\frac{4\pi S_0}{kr}.$$

可见，$E[\varphi_2^2]$与圆盘的转动惯量无关。

例题 6-15 已知鸣钟在平稳正态随机风力激励下作微幅振动，假设激励力的合力 $x(t)$ 作用位置与悬挂点 O 的距离为 A，$A=5$ 厘米，如图 6-15-1 所示。激励自谱 $S_{xx}(\omega)=S_0=0.2$ 公斤^2·秒/弧度，钟重 $G_1=30$ 公斤(不包括锤)，锤重 $G_2=2$ 公斤，钟绕 O 点的转动惯量 $J_0=3600$ 公斤·厘米^2，钟的质心为 C，$OC=H=8$ 厘米，锤的悬挂点为 O_1，$OO_1=a=5$ 厘米，锤可看作质量集中在 B 点的单摆，摆长 $l=10$ 厘米。

试求：

(a) 钟振动的二阶振型及敲响钟的条件；

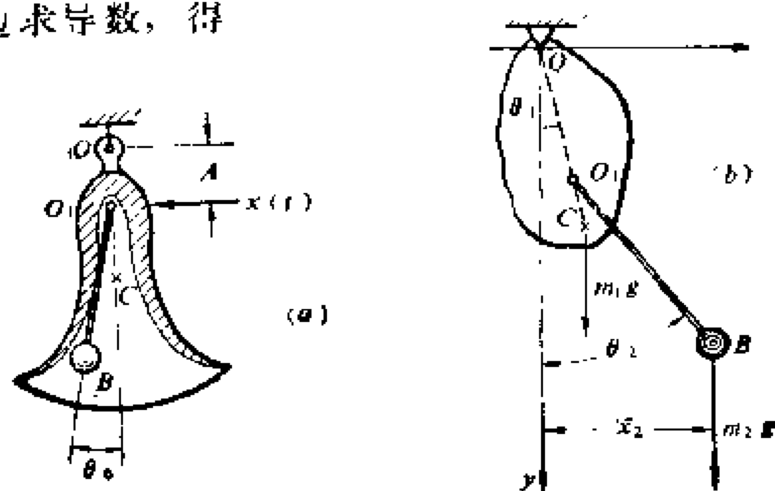
(b) 钟受风力激励时对钟转角 θ_1 和锤转角 θ_2 的频率响应函数；

(c) 钟的位移 x_2 的响应谱。

解：(a) 将鸣钟简化为图 6-15-1(b) 所示的二自由度系统，选广义坐标为 θ_1 和 θ_2，于是质量 m_2 的位置为

$$\begin{cases}x_2=a\sin\theta_1+l\sin\theta_2,\\ y_2=a\cos\theta_1+l\cos\theta_2.\end{cases} \tag{1}$$

对上式两边求导数，得



例题图 6-15-1

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a\cos\theta_1\dot{\theta}_1 + l\cos\theta_2\cdot\dot{\theta}_2, \\ \dot{y}_2 = -(a\sin\theta_1\dot{\theta}_1 + l\sin\theta_2\dot{\theta}_2). \end{cases} \tag{2}$$

系统的动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2] \\ &= \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[a^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2 + 2al\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \times \\ &\quad \times\cos(\theta_1-\theta_2)], \end{aligned} \tag{3}$$

系统的势能

$$\begin{aligned} U = m_1gH(1-\cos\theta_1) &+ m_2g[a(1-\cos\theta_1) + \\ &+ l(1-\cos\theta_2)] - x(t)A\sin\theta_1. \end{aligned} \tag{4}$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta_i} + \frac{\partial U}{\partial\theta_i} = 0 \qquad i=1,2. \tag{5}$$

并注意到微幅振动的条件，即

$$\begin{cases} \sin\theta_1 \doteq \theta_1, \\ \sin\theta_2 \doteq \theta_2, \\ \cos\theta_1 \doteq \cos\theta_2 \doteq 1, \\ \cos(\theta_1-\theta_2) \doteq 1, \\ \sin(\theta_1-\theta_2) \doteq 0, \end{cases} \tag{6}$$

得运动微分方程

$$\begin{cases} J_0\ddot{\theta}_1+m_2a^2\ddot{\theta}_1+m_2al\ddot{\theta}_2+(m_1H+m_2a)g\theta_1-x(t)\cdot A=0, \\ m_2al\ddot{\theta}_1+m_2l^2\ddot{\theta}_2+m_2gl\theta_2=0, \end{cases} \tag{7}$$

则以广义坐标 θ_1 和 θ_2 表示的自由振动微分方程为.

$$\begin{cases} (J_0+m_2a^2)\ddot{\theta}_1+m_2al\ddot{\theta}_2+(m_1H+m_2a)g\theta_1=0, \\ m_2al\ddot{\theta}_1+m_2l^2\ddot{\theta}_2+m_2gl\theta_2=0. \end{cases} \tag{8}$$

设

$$\begin{cases} \theta_1=\theta_{10}\sin(pt+\varphi), \\ \theta_2=\theta_{20}\sin(pt+\varphi). \end{cases} \tag{9}$$

代入(8)式得

$$\begin{cases} -(J_0+m_2a^2)p^2\theta_{10}-m_2alp^2\theta_{20}+(m_1H+m_2a)g\theta_{10}=0, \\ -m_2ap^2\theta_{10}-m_2lp^2\theta_{20}+m_2g\theta_{20}=0. \end{cases} \tag{10}$$

(10)式有非零解的条件是

$$\begin{vmatrix} (m_1H+m_2a)g-(J_0+m_2a^2)p^2 & -m_2alp^2 \\ -m_2ap^2 & m_2g-m_2lp^2 \end{vmatrix}=0, \tag{11}$$

即

$$(m_1H+m_2a)g^2m_2-m_2g(J_0+m_2a^2)p^2-m_2l(m_1H+ \\ +m_2a)gp^2+m_2l(J_0+m_2a^2)p^4-m_2^2a^2lp^4=0, \tag{12}$$

或

$$m_2J_0lp^4-[J_0+m_2a^2+l(m_1H+m_2a)]m_2gp^2+ \\ +(m_1H+m_2a)m_2g^2=0, \tag{13}$$

$$p_{1,2}^2=\frac{m_2g[J_0+m_2a^2+(m_1H+m_2a)l]}{2m_2J_0l}- \\ -\frac{\sqrt{[J_0+m_2a^2+(m_1H+m_2a)l]^2m_2^2g^2-4m_2^2J_0l(m_1H+m_2a)g}}{2m_2J_0l}. \tag{14}$$

将题意给出的数据代入上式，得

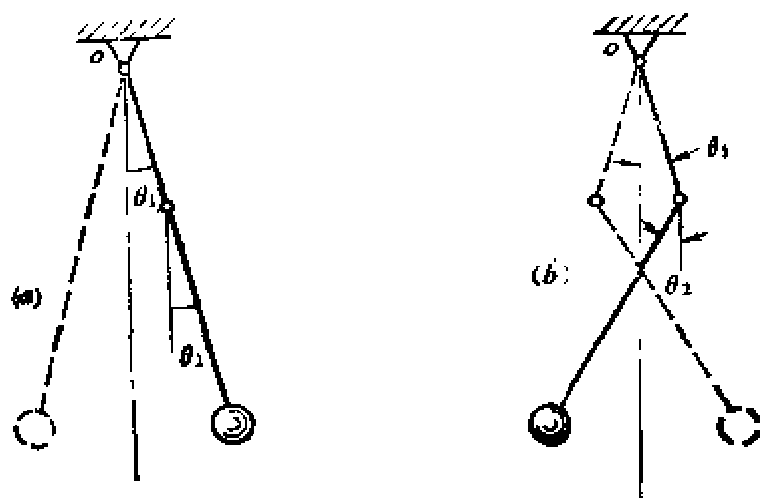
$$\begin{cases} p_1^2=65.4\ (1/秒^2), \\ p_2^2=102.19\ (1/秒^2). \end{cases} \tag{15}$$

又将(14)式代入(10)式，得

$$\frac{\theta_{20}}{\theta_{10}}=\frac{m_2ap^2}{m_2g-m_2lp^2}=\frac{ap^2}{g-lp^2}. \tag{16}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\theta_{20}}{\theta_{10}}\right|_{p^2=p_1^2}=1,$$

$$\left.\frac{\theta_{20}}{\theta_{10}}\right|_{p^2=p_2^2}=-12.5.$$



例题图 6-15-2

由此绘出系统的一阶和二阶振型如例题图 6-15-2 (a)和(b)所示，当系统按一阶振型振动时，钟和锤犹如一个刚体似的同步运动，此时钟不可能敲响。当系统按二阶振型振动时，钟和锤作反向运动，有可能敲响钟。因而敲响钟的条件为：系统的振动必须包含二阶振型，且

$$\theta_1 \geqslant \frac{\theta_0}{12.5}, \tag{17}$$

式中 θ_0 由钟的结构形状决定，见例题图 6-15-1 (a)；12.5 为二阶振型时的振幅比

b. 求频率响应函数

设

$$\left.\begin{aligned} &x(t)=x_0e^{i\omega t},\\ &\theta_1(t)=H_{x\theta_1}(\omega)x_0e^{i\omega t},\\ &\theta_2(t)=H_{x\theta_2}(\omega)x_0e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

将(18)式代入(7)式，得

$$\begin{cases}[(m_1H+m_2a)g-(J_0+m_2a^2)\omega^2]H_{x\theta_1}(\omega)- \\ \qquad m_2al\omega^2H_{x\theta_2}(\omega)=A, \\ (m_2g-m_2\omega^2l)H_{x\theta_2}(\omega)-m_2a\omega^2H_{x\theta_1}(\omega)=0.\end{cases} \tag{19}$$

解(19)式，得

$$H_{x\theta_1}(\omega)=\frac{Am_2(g-l\omega^2)}{\Delta}, \tag{20}$$

$$H_{x\theta_2}(\omega)=\frac{Am_2a\omega^2}{\Delta}. \tag{21}$$

式中

$$\Delta=[(m_1H+m_2a)g-(J_0+m_2a^2)\omega^2](m_2g-m_2l\omega^2)- \\ m_2^2a^2l\omega^4.$$

由于系统不计阻尼，故 $H_{x\theta_1}(\omega)$、$H_{x\theta_2}(\omega)$均为 ω 的实函数。

（c）求锤的位移响应谱

应用公式（6-22）：

$$S_\theta(\omega)=\overline{H(\omega)}^{*T}S_x(\omega)\overline{H(\omega)}, \tag{22}$$

式中

$$\overline{S_\theta(\omega)}=\begin{bmatrix}S_{\theta_1\theta_1}(\omega) & S_{\theta_1\theta_2}(\omega)\\ S_{\theta_2\theta_1}(\omega) & S_{\theta_2\theta_2}(\omega)\end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$S_{xx}(\omega)=S_0, \tag{24}$$

$$\overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix}H^*_{x\theta_1}(\omega)\\ H^*_{x\theta_2}(\omega)\end{bmatrix}^T, \tag{25a}$$

$$\overline{H(\omega)}^{*T}=[H^*_{x\theta_1}(\omega)\quad H^*_{x\theta_2}(\omega)]^T. \tag{25b}$$

$$\therefore\quad S_{\theta_1\theta_1}(\omega)=|H_{x\theta_1}(\omega)|^2S_0, \tag{26}$$

$$S_{\theta_2\theta_2}(\omega)=|H_{x\theta_2}(\omega)|^2S_0, \tag{27}$$

$$S_{\theta_1\theta_2}(\omega)=H^*_{x\theta_1}(\omega)H_{x\theta_2}(\omega)S_0, \tag{28}$$

$$S_{\theta_2\theta_1}(\omega)=H^*_{x\theta_2}(\omega)H_{x\theta_1}(\omega)S_0, \tag{29}$$

$$S_{\theta_1\theta_2}(\omega)=S^*_{\theta_2\theta_1}(\omega). \tag{30}$$

因为 $H_{x\theta_1}(\omega)$、$H_{x\theta_2}(\omega)$ 是实函数，故（28）至（30）式中的共轭

记号“*”也可以去掉。由（1）式和（6）式得：

$$x_2 = a\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 \doteq a\theta_1 + l\theta_2, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \phi_{x_2x_2}(\tau) &= E[x_2(t)x_2(t+\tau)] \\ &= E\{[a\theta_1(t)+l\theta_2(t)][a\theta_1(t+\tau)+l\theta_2(t+\tau)]\} \\ &= a^2\phi_{\theta_1\theta_1}(\tau)+al[\phi_{\theta_1\theta_2}(\tau)+\phi_{\theta_2\theta_1}(\tau)]+ \\ &\quad l^2\phi_{\theta_2\theta_2}(\tau)\end{aligned} \tag{32}$$

将（32）式进行付里叶变换，得

$$\begin{aligned}S_{x_2x_2}(\omega) &= a^2S_{\theta_1\theta_1}(\omega)+al[S_{\theta_1\theta_2}(\omega)+S_{\theta_2\theta_1}(\omega)]+ \\ &\quad + l^2S_{\theta_2\theta_2}(\omega) \\ &= S_0\{a^2H^2_{x\theta_1}(\omega)+2\,alH_{x\theta_1}(\omega)H_{x\theta_2}(\omega)+ \\ &\quad + l^2H^2_{x\theta_2}(\omega)\} \\ &= \frac{S_0}{\Delta^2}[a^2A^2m_2^2(g-l\omega^2)^2+ \\ &\quad +2\,alA^2m_2^2a\omega^2(g-l\omega^2)+l^2A^2m_2^2a^2\omega^4] \\ &= \frac{S_0A^2m_2^2a^2g^2}{\Delta^2}.\end{aligned}$$

式中Δ如（21）式所示，所以

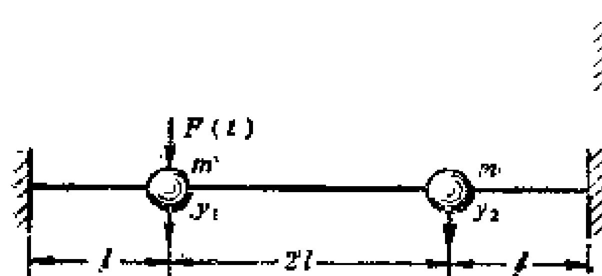
$$S_{x_2x_2}(\omega)=$$

$$\frac{S_0A^2a^2g^2}{\{lJ_0\omega^4-g[(m_1H+m_2a)l+J_0+m_2a^2]\omega^2+(m_1H+m_2a)g^2\}^2}.$$

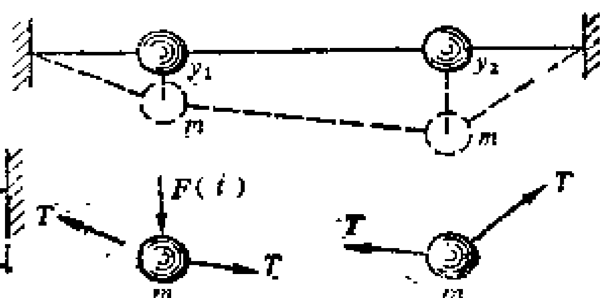
例题 6-16 一长度为4l的弦，受张力T，弦上有两个集中质量，如图6-16-1所示。在左边一质量上受随机力$F(t)$激励。已知其自谱密度 $S_{FF}(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}$，若响应为质量的铅垂位移$y_1$和$y_2$，质量运动的等效粘滞阻尼系数为$r$，试求：

(a) 系统的频率响应矩阵；

(b) 各质量位移响应的均方值 $E[y_1^2]$和 $E[y_2^2]$



例题图 6-16-1



例题图 6-16-2

解：(a) 在弦振动中，弦的张力 T 假定为常数。分别对两质量进行受力分析和运动分析，应用牛顿定律得

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -T\sin\dfrac{y_1}{l} + T\sin\dfrac{y_2 - y_1}{2l} - r\dot{y}_1 + F(t), \\ m\ddot{y}_2 = -T\sin\dfrac{y_2}{l} - T\sin\dfrac{y_2 - y_1}{2l} - r\dot{y}_2. \end{cases} \tag{1}$$

因为假定振动是微幅的，所以有

$$\begin{cases} \sin\dfrac{y_1}{l} \doteq \dfrac{y_1}{l}, \\ \sin\dfrac{y_2}{l} \doteq \dfrac{y_2}{l}, \\ \sin\dfrac{y_2 - y_1}{2l} \doteq \dfrac{y_2 - y_1}{2l}, \end{cases} \tag{2}$$

得

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -T\dfrac{y_1}{l} + T\dfrac{y_2}{2l} - T\dfrac{y_1}{2l} - r\dot{y}_1 + F(t), \\ m\ddot{y}_2 = -T\dfrac{y_2}{l} - T\dfrac{y_2}{2l} + T\dfrac{y_1}{2l} - r\dot{y}_2. \end{cases} \tag{3}$$

经整理得

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + r\dot{y}_1 + \dfrac{3T}{2l}y_1 - \dfrac{T}{2l}y_2 = F(t), \\ m\ddot{y}_2 + r\dot{y}_2 + \dfrac{3T}{2l}y_2 - \dfrac{T}{2l}y_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

这是一个两自由度系统，因而频率响应矩阵为 2×2 阶方阵，即

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

因为 $F(t)$ 仅作用在第一个质量上，设 $F(t)=F_0e^{i\omega t}$，则

$$y_1 = H_{11}(\omega)F_0e^{i\omega t},$$
$$y_2 = H_{12}(\omega)F_0e^{i\omega t}.$$

代入（4）式，得

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m\right)H_{11}(\omega) - \dfrac{T}{2l}H_{12}(\omega) = 1, \\ -\dfrac{T}{2l}H_{11}(\omega) + \left(\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m\right)H_{12}(\omega) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

于是得

$$H_{11}(\omega) = \frac{\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m}{\left(\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m\right)^2 - \dfrac{T^2}{4l^2}}, \tag{7}$$

$$H_{12}(\omega) = \frac{T/2l}{\left(\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m\right)^2 - T^2/4l^2} \tag{8}$$

若仅在第二个质量上作用力激励，即设 $F(t)=F_0e^{i\omega t}$，则有

$$y_1 = H_{21}(\omega)F_0e^{i\omega t},$$
$$y_2 = H_{22}(\omega)F_0e^{i\omega t}.$$

代入（4）式，得

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m\right)H_{21}(\omega) - \dfrac{T}{2l}H_{22}(\omega) = 0, \\ -\dfrac{T}{2l}H_{21}(\omega) + \left(\dfrac{3T}{2l} + ri\omega - \omega^2 m\right)H_{22}(\omega) = 1. \end{cases} \tag{9}$$

于是得

$$H_{21}(\omega) = \frac{T/2l}{(3T/2l + ri\omega - \omega^2 m)^2 - T^2/4l^2}, \tag{10}$$

$$H_{22}(\omega)=\frac{(3T/2l+ri\omega-\omega^2m)}{(3T/2l+ri\omega-\omega^2m)^2-T^2/4l^2}. \tag{11}$$

由此可见 $H_{11}(\omega)=H_{22}(\omega)$，$H_{12}(\omega)=H_{21}(\omega)$.

所以

$$H(\omega)=\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}.$$

(b) 求两个均方值

$$E[y_1^2]=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{11}(\omega)|^2 S_{FF}(\omega)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{3T/2l+ri\omega-\omega^2m}{(3T/2l+ri\omega-\omega^2m)^2-T^2/4l^2}\right|^2\frac{a}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{3T/2l+ri\omega-\omega^2m}{m^2\omega^4-\frac{3T}{l}m\omega^2+2\frac{T^2}{l^2}-r^2\omega^2+\frac{3T}{2l}ri\omega-rmi\omega^3}\right|^2\times$$

$$\times\left|\frac{1}{a+i\omega}\right|^2d\omega,$$

记 $\frac{T}{l}=c$，则 $E[y_1^2]=a\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\frac{3}{2}c+ri\omega-\omega^2m}{\Delta}\right|^2d\omega$.

式中：

$$\Delta=m^2i\omega^5+m(am-r)\omega^4-(rma+3cm+r^2)i\omega^3-$$
$$\left(3cma+r^2a+\frac{3}{2}cr\right)\omega^2+\left(\frac{3}{2}cra-2c^2\right)i\omega-2c^2a.$$

查附录 8 中 $n=5$ 的情况．令 $A_0=2c^2a$，$A_1=\frac{3}{2}cra+2c^2$，$A_2=3cma+r^2a-\frac{3}{2}cr$，$A_3=rma+3cm+r^2$，$A_4=m(am+r)$，$A_5=m^2$，$B_0=\frac{3}{2}c$，$B_1=r$，$B_2=-m$，$B_3=B_4=0$　所以有

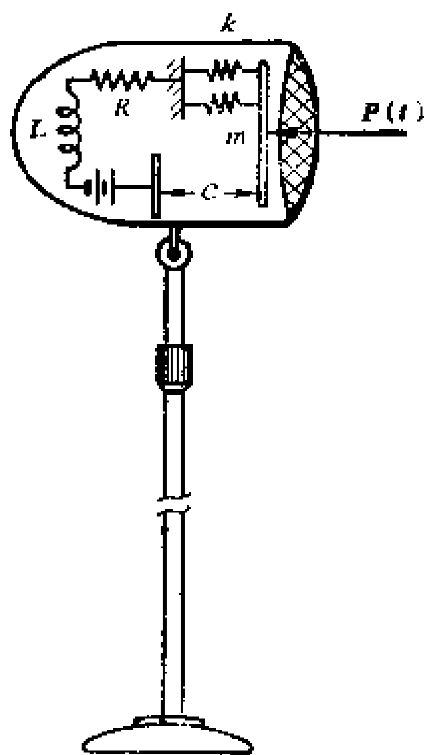
$$E[y_1^2]=\frac{a\pi\left\{B_2^2U+(2B_0B_2-B_1^2)V-\frac{B_0^2}{A_0}(A_2V-A_4U)\right\}}{U^2-VQ}. \tag{12}$$

式中
$$U=A_0A_6-A_1A_4-2c^2\alpha m^2-\left(\frac{3}{2}cr\alpha+2c^2\right)m(\alpha m+r)$$
$$=-crm\left(\frac{3}{2}\alpha^2m+\frac{3}{2}r\alpha+2c\right),$$
$$V=A_3A_4-A_2A_5=rm\left(\alpha^2m^2+rm\alpha+\frac{3}{2}cm+r^2\right),$$
$$Q=A_0A_3-A_1A_2$$
$$=-cr\left(\frac{5}{2}c\alpha^2m+\frac{9}{4}cr\alpha+\frac{3}{2}r^2\alpha^2+3c^2\right),$$
计算结果得
$$E[y_1^2]=\frac{4cr\alpha^2\left[I+6J+3c^2m^2+\frac{2c^3m}{\alpha^2}+\frac{12c^2r^2}{\alpha^2}\right]}{\alpha\pi[3I+34J+5c^2m^2]},\tag{13}$$
式中 $I=c\alpha^2m^3+cr\alpha m^2+19cmr^2+\frac{3}{2}\frac{c^2rm}{\alpha}+9\frac{cr^3}{\alpha}$,
$$J=r^2(\alpha^2m^2+r\alpha m+r^2),$$
用类似的方法，可求得 $E[y_2^2]$。

例题 6-17 电容式话筒如图 6-17-1 所示，其回路包括电池(定电压 E)、电阻 R、线圈 L 及电容流 C。电容器以一质量为 m 的可动板，安装在一固定板上。可动板受随机变化的音压力 $P(t)$ 作用而发生振动。以电容器之电荷 Q 及膜板之变位 q 为两随机输出，求：

(a) 系统的频率响应矩阵；

(b) 当 $S_{PP}(\omega)=S_0$ 为白



例题图 6-17-1

噪声时，Q 和 q 的响应谱及均方值。

解：选某静止状态，电容器充电荷为 Q_0，此时可动电极受拉力，压缩弹簧有变位 q_0，在振动时，电容器之电荷为 Q_0+Q，而可动电极变位为 q_0+q，电容器之容量与电极间之距离成反比，即电容 $C=A/(a-q)$，式中 A，a 均为常数。

下面考虑建立系统振动的微分方程。

系统的总势能

$$U=\frac{1}{2c}(Q_0+Q)^2+\frac{k}{2}(q_0+q)^2-EQ-P(t)\cdot q$$

$$=\frac{a-q}{2A}(Q_0+Q)^2+\frac{k}{2}(q_0+q)^2-EQ-P(t)\cdot q,$$

由于平衡条件为：

$$Q=0,\quad q=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{\partial U}{\partial q}=0,$$

则得

$$Q_0=\frac{A}{a}E,$$

$$q_0=\frac{AE^2}{2ka^2}.$$

若不计 Q 及 q 之高次（三次以上）项，则

$$U=\frac{a}{2A}Q^2-\frac{E}{a}Qq+\frac{k}{2}q^2-P(t)\cdot q+\text{常数},$$

系统的电磁能与动能

$$T=\frac{1}{2}(L\dot{Q}^2+m\dot{q}^2),$$

电阻耗散能

$$W_R=\frac{1}{2}R\dot{Q}^2,$$

将以上各式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{\partial U}{\partial x_i}=-\frac{\partial W_R}{\partial \dot{x}_i},$$

式中 $i=1,2$，$x_1=q$，$x_2=Q$．于是可得

$$\begin{cases} m\ddot{q}+kq-\dfrac{E}{a}Q=P(t), \\ L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\dfrac{a}{A}Q-\dfrac{E}{a}q=0\,. \end{cases} \tag{1}$$

(a) 求系统的频率响应矩阵

对一般的机-电两自由度系统，可能有两个激励作用在系统上，所以振动微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} m\ddot{q}+kq-\dfrac{E}{a}Q=P(t), \\ L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\dfrac{a}{A}Q-\dfrac{E}{a}q=F(t). \end{cases} \tag{2}$$

在(2)式中令 $P(t)=P_0e^{i\omega t}$，$F(t)=0$，则

$$Q=P_0H_{PQ}(\omega)e^{i\omega t},$$

$$q=P_0H_{Pq}(\omega)e^{i\omega t}.$$

代入(2)式，得

$$\begin{cases} (k-m\omega^2)H_{Pq}(\omega)-\dfrac{E}{a}H_{PQ}(\omega)=1\,, \\ \left(\dfrac{a}{A}-L\omega^2+iR\omega\right)H_{PQ}(\omega)-\dfrac{E}{a}H_{Pq}(\omega)=0\,. \end{cases} \tag{3}$$

解(3)式，得

$$\begin{cases} H_{Pq}(\omega)=\dfrac{a/A-L\omega^2+iR\omega}{\Delta}, \\ H_{PQ}(\omega)=\dfrac{E/a}{\Delta}. \end{cases} \tag{4}$$

式中 $\Delta=(k-m\omega^2)(a/A-L\omega^2+iR\omega)-E^2/a^2$。在(2)式中，令 $P(t)=0$，$F(t)=F_0e^{i\omega t}$，则

$$Q=F_0H_{FQ}(\omega)e^{i\omega t},$$

$$q=F_0H_{Fq}(\omega)e^{i\omega t}.$$

代入(2)式，得

$$(k-m\omega^2)H_{Fq}(\omega)-\frac{E}{a}H_{FQ}(\omega)=0,$$

$$\left(\frac{a}{A}-L\omega^2+iR\omega\right)H_{FQ}(\omega)-\frac{E}{a}H_{Fq}(\omega)=1.$$

解得

$$\begin{cases} H_{Fq}(\omega)=\dfrac{E/a}{\Delta}, \\ H_{FQ}(\omega)=\dfrac{K-m\omega^2}{\Delta}. \end{cases} \tag{5}$$

所以，本题机 电系统的频率响应矩阵

$$\overline{H(\omega)}=\begin{bmatrix} H_{Pq}(\omega) & H_{PQ}(\omega) \\ H_{Fq}(\omega) & H_{FQ}(\omega) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

(b) 响应的谱密度为

$$S_{qq}(\omega)=|H_{Pq}(\omega)|^2S_{PP}(\omega)$$
$$=\frac{[(a/A-L\omega^2)^2+R^2\omega^2]S_0}{\Delta^2}, \tag{7}$$

$$S_{QQ}(\omega)=|H_{PQ}(\omega)|^2S_{PP}(\omega)$$
$$=\frac{S_0E^2/a^2}{\Delta^2}, \tag{8}$$

$$S_{qQ}(\omega)=H^*_{Pq}(\omega)H_{PQ}(\omega)S_{PP}(\omega)$$
$$=\frac{(a/A-L\omega^2-iR\omega)ES_0/a}{\Delta^2}, \tag{9}$$

$$S_{Qq}(\omega)=H^*_{PQ}(\omega)H_{Pq}(\omega)S_{PP}(\omega)$$
$$=\frac{(a/A-L\omega^2+iR\omega)ES_0/a}{\Delta^2} \tag{10}$$
$$=S^*_{qQ}(\omega).$$

式中$\Delta^2=\left[(k-m\omega^2)\left(\dfrac{a}{A}-L\omega^2\right)-\dfrac{E^2}{a^2}\right]^2+(k-m\omega^2)^2R^2\omega^2$

以矩阵表示，即为

$$\overline{S_{yy}(\omega)}=\overline{H(\omega)}^{*T}\ \overline{S_x(\omega)}\ \overline{H(\omega)}, \tag{11}$$

响应的均方值

$$E[q^2]=\int_{-\infty}^{\infty} S_{qq}(\omega)d\omega$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{\infty}|H_{eq}(\omega)|^2 d\omega$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{a/A-iR\omega-L\omega^2}{\left(\frac{ka}{A}-\frac{E^2}{a^2}\right)+kRi\omega-\left(\frac{ma}{A}+kL\right)\omega^2-mRi\omega^3+mL\omega^4}\right|^2 d\omega,$$

查附录8，现为 $n=4$ 的情况，$A_0=\frac{ka}{A}-\frac{E^2}{a^2}$， $A_1=kR$， $A_2=\frac{ma}{A}+kL$， $A_3=mR$， $A_4=mL$， $B_0=a/A$， $B_1=R$，$B_2=L$，$B_3=0$.

$$\therefore\quad I_4=\frac{\pi\left\{-A_1B_2^2-A_3(B_1^2-2B_0B_2)+\frac{B_0^2}{A_0}(A_1A_4-A_2A_3)\right\}}{A_0A_3^2+A_1(A_1A_4-A_2A_3)}$$

$$=\pi\left\{-kRL^2-mR\left(R^2-2\frac{a}{A}L\right)+\frac{a^2}{A^2(ka/A-E^2/a^2)}\left(-\frac{m^2aR}{A}\right)\right\}\Big/-\frac{E^2}{a^2}m^2R^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{E^2Rm^2}\left\{kL^2+m\left(R^2-2\frac{a}{A}L\right)+\frac{m^2a^3}{A^2(ka^3-E^2A)}\right\},$$

$$\therefore E[q^2]=\frac{\pi S_0a^2}{E^2Rm^2}\left\{kL^2+m\left(R^2-2\frac{a}{A}L\right)+\frac{m^2a^3}{A^2(ka^3-E^2A)}\right\}.\tag{12}$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
E[Q^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{QQ}(\omega)d\omega \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{PQ}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{S_0 E^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 \Big/ \left[\left(\frac{k\alpha}{A} - \frac{E^2}{\alpha^2} \right) + kRi\omega - \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(\frac{m\alpha}{A} + kL \right)\omega^2 - mRi\omega^3 + mL\omega^4 \right] \right|^2 d\omega \\
&= \frac{S_0 E^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\pi\alpha^2}{E^2 R m^2} \left\{ \frac{m^2 \alpha^3}{k\alpha^3 - E^2 A} \right\} \\
&= \frac{\pi S_0}{R\left(k - \dfrac{E^2 A}{\alpha^3} \right)}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

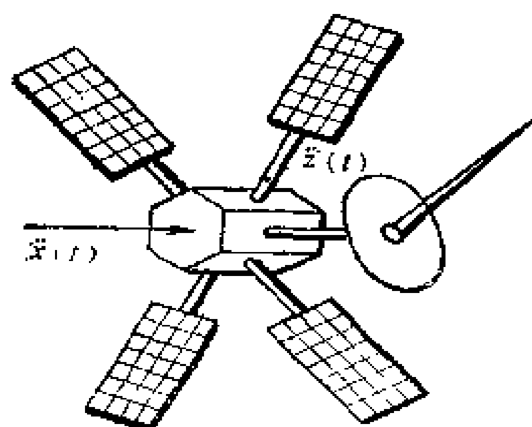
可见，$E[Q^2]$与 m，L 无关。

讨论：(1) 白噪声是理想情况，实际中激励谱仅在有限频带区近似为常数，这时均方值 $E[q^2]$和 $E[Q^2]$ 的计算要繁复得多。这就是工程上当激励谱覆盖主要频率范围且大致等值时，常常把它当作白噪声处理的原因之一

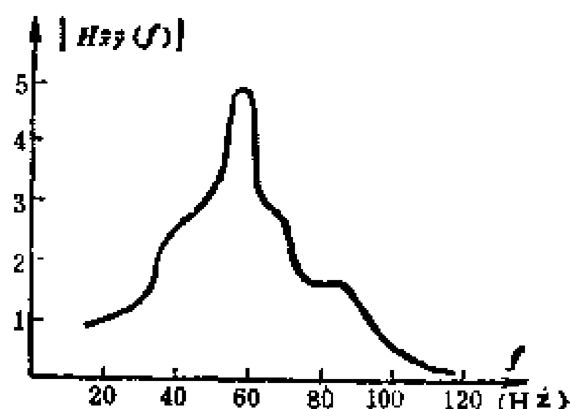
(2) 白噪声的均方值为无穷大，即本题的输入功率为无穷大，但由于系统存在着电阻 R，不断地消耗着振动能量，故 $E[q^2]$和 $E[Q^2]$仍为有限值。从(12)和(13)式可见，当 $R\to 0$ 时，$E[q^2]\to\infty$、$E[Q^2]\to\infty$

(3) 但并非所有的有阻尼系统在受到白噪声激励时，系统所有响应的均方值都是有限值，如例题 6-7 的情况就是 所以还要看激励是什么、响应是什么。

例题 6-18 宇宙飞船上的太阳能电池板，可以模拟为两个对称放置的悬臂梁。在振动台上作正弦扫瞄试验后，得到此系统的频率响应函数有一个尖峰(见例题图 6-18-2)。若系统的阻尼系



例题图 6-18-1



例题图 6-18-2

数 $\zeta=0.1$，受基础加速度 $\ddot{x}[t]$的激励，$\ddot{x}[t]$为白噪声随机过程，$W_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)=0.1(g^2/赫)$。求绝对加速度响应 $\ddot{z}[t]$ 的均方根值。

解：方法 1 因试验曲线有一个尖峰，故在此频率范围内可将该系统视作一个单自由度系统，其共振频率约为 $f_0=55$ 赫，而单自由度系统受基础加速度激励时，其绝对加速度响应的频率响应函数，易于用解析法求得。

以 $z(t)$为绝对坐标，可写出如下的运动微分方程：

$$m\ddot{z}+r(\dot{z}-\dot{x})+k(z-x)=0,$$

即

$$\ddot{z}+2\zeta\omega_0\dot{z}+\omega_0^2 z=2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x. \tag{1}$$

式中 $\omega_0=\sqrt{k/m}$，$\zeta=r/2\sqrt{km}$。

令 $\ddot{x}=e^{i\omega t}$，则 $\ddot{z}=H_{\ddot{x}\ddot{z}}(\omega)e^{i\omega t}$，

代入到(1)式得

$$H_{\ddot{x}\ddot{z}}(\omega)=\frac{-\zeta\omega_0 i\omega+\omega_0^2}{-\omega^2+2\zeta\omega_0 i\omega+\omega_0^2}. \tag{2}$$

由(2)式经过换算绘出的 $H_{\ddot{x}\ddot{z}}(f)$ 曲线与例题图 6-18-2 不完全符合，这是因为简化系统毕竟不完全与实际系统相同。把(2)式代入均方值计算式

$$E[\ddot{z}^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\ddot{z}\ddot{z}}(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{\ddot{x}\ddot{z}}(\omega)|^2 S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)d\omega$$

$$=S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2\zeta\omega_0 i\omega+\omega_0^2}{-\omega^2+2\zeta\omega_0 i\omega+\omega_0^2}\right|^2 d\omega,$$

式中　$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)$ 为常数。积分值可查附录 8 得到

$$\therefore\qquad E[\ddot{z}^2]=\frac{W_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)}{4\pi}\,\frac{\pi\omega_0(4\zeta^2+1)}{2\zeta}$$

$$=\frac{0.1}{4\pi}\,\frac{\pi\cdot[2\pi\times 55](4\times 0.1^2+1)}{2\times 0.1}$$

$$=44.92(g^2).$$

因激励的均值为零，故响应的均值亦为零

$$\therefore\quad E[\ddot{z}^2]=\sigma_{\ddot{z}}^2,$$

及

$$\ddot{z}_{grms}=\sigma_{\ddot{z}}=\sqrt{E[\ddot{z}^2]}=\sqrt{44.92(g^2)}=6.7(g).$$

方法 2　按图 6 18-2 实测得到的 $|H_{\ddot{x}\ddot{z}}(f)|$ 曲线，通过下式

$$E[\ddot{z}^2]=\sum_{i=1}^{N}|H_{\ddot{x}\ddot{z}}(f_i)|^2 S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f_i)\Delta f,$$

列表进行计算.

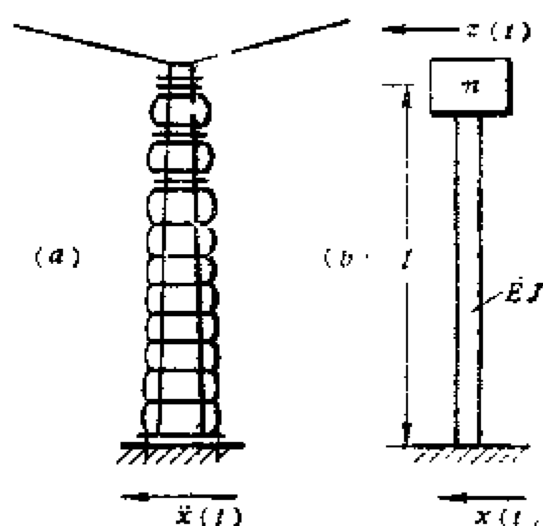
次序	f_i	$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f_i)$	Δf	$H(f_i)$	$\lvert H(f_i)\rvert^2\Delta f$	$\lvert H(f_i)\rvert^2\Delta f S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f_i)$
1	20	0.1	20	1	20	2
2	40	0.1	20	3	180	18
3	55	0.1	10	5	250	25
4	70	0.1	20	3	180	18
5	90	0.1	20	1.5	45	4.5
6	110	0.1	20	0.5	5	0.5
					+)	68　(g^2)

$$\therefore\quad \sigma_{\ddot{z}}=\sqrt{68(g^2)}=8.2(g).$$

如果将 Δf 取得更小，则精度将提高，但计算工作量也相应

迅增加

讨论：显然，方法2的运算较繁，但比较接近实际系统。在产品或产品的模型还没有的时候，用方法1作粗略的估计是设计工作者十分必要的工作。



例题图 6-19-1

例解 6-19 为了检验图6-19-1(a)的高压输电线绝缘柱能否承受基础地震激励 $\ddot{x}[t]$，将其简化为最简单的模型，见图6-19-1(b)，即悬臂梁只有弹性，而无质量。梁的端点有一集中质量 m，求顶端位移响应谱和响应均方根值。设 $m=100$ 公斤·秒^2/米，$l=3$ 米，$E=1\times10^6$公斤/厘米^2，$J=80$ 厘米^4，结构的当量阻尼因子 $\zeta=0.4$。选用某地震谱作为检验标准，即单边自谱

$$W_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)=\frac{cf^2}{(a+f^4)(b+f^2)},$$

其中 $a=208.5(1/秒^4)$，$b=4(1/秒^2)$，$c=1.92\times10^5(g^2/秒^3)$，峰值频率 $f=2.62$ 赫，峰值 $W_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)|_{max}=4.75\times10^3(g^2\cdot秒)$。

解：(1) 对图6-19-1(b)所示模型，其运动微分方程可应用牛顿定律得到

$$m\ddot{z}=-r(\dot{z}-\dot{x})-k(z-x),$$

即用绝对位移响应 $z(t)$ 表示的微分方程为

$$\ddot{z}+2\zeta\omega_0\dot{z}+\omega_0^2z=2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x, \tag{1}$$

其中

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}=\frac{3EJ}{ml^3}=\frac{3\times1\times10^6\times80}{(3\times10^2)^3\times\frac{100}{100}}=8.89(1/秒^2),$$

即 $$\omega_0=2.98(1/秒)=0.4745(赫).$$

编号	1 f_i (Hz)	2 Δf_i	3 f_i^2	4 $208.5+f_i^4$	5 $4+f_i^2$	6 $\frac{\Delta f_i}{f_i^2(208.5+f_i^4)(4+f_i^2)}$
1	0.3	0.3	0.09	208.5	4.09	3.908×10^{-3}
2	0.6	0.3	0.36	208.6	4.36	9.163×10^{-4}
3	0.8	0.2	0.64	208.9	4.64	3.224×10^{-4}
4	1	0.2	1	209.5	5	1.91×10^{-4}
5	2	1	4	224.5	8	1.39×10^{-4}
6	2.62	0.62	6.86	255.62	10.86	3.26×10^{-5}
7	3.62	1	13.10	380.23	17.1	1.17×10^{-5}
8	4.62	1	21.34	664.08	25.34	2.78×10^{-7}
9	6	1.38	36	1504.5	40	6.37×10^{-7}
10	[illegible]	1	49	2609.5	53	1.48×10^{-7}
11	8	1	64	4304.5	68	5.34×10^{-8}
12	9	1	81	6769.5	85	2.14×10^{-8}
13	10	1	100	[illegible]	104	9.42×10^{-9}
14	12	2	144	[illegible]	148	4.48×10^{-9}
15	[illegible]	2	196	[illegible]	200	1.32×10^{-9}
16	16	2	256	[illegible]	260	4.57×10^{-10}
17	18	2	324	[illegible]	328	1.79×10^{-10}

7	8	9	10
$(1.687f_i)^2$	$[1-(2.108f_i)^2]^2$	$\dfrac{1+(1.687f_i)^2}{[1-(2.108f_i)^2]^2+(1.687f_i)^2}$	第 6 项与第 9 项的乘积
0.2561	0.360	2.038	7.96×10^{-3}
1.0245	0.3597	1.4[illegible]	1.34×10^{-3}
1.8214	3.400	0.5404	1.742×10^{-4}
2.85	11.80	0.26	0.50×10^{-4}
11.38	281.59	0.04	5.56×10^{-6}
19.54	870.43	0.02	6.52×10^{-7}
[illegible].29	3275.45	0.01	1.17×10^{-7}
[illegible].74	8807.32	6.96×10^{-3}	$1.93\times10^{-[illegible]}$
[illegible]2.[illegible]5	25272.07	4.08×10^{-3}	2.59×10^{-9}
1[illegible]9.45	46976.05	2.93×10^{-3}	4.41×10^{-10}
182.14	80312.44	2.23×10^{-3}	$1.22\times10^{-[illegible]}$
[illegible]0.52	12[illegible]35.61	1.79×10^{-3}	3.83×10^{-11}
284.60	196573.76	1.45×10^{-3}	1.37×10^{-11}
[illegible]09.82	4.08×10^{5}	1.00×10^{-3}	$4.48\times10^{-[illegible]}$
557.81	7.57×10^{5}	7.38×10^{-4}	$9.74\times10^{-1[illegible]}$
72[illegible]	1.[illegible]	5.65×10^{-4}	$2.58\times10^{-1[illegible]}$
922.09	$2.07\times10^{[illegible]}$	4.[illegible]	7.98×10^{-14}
			$\sum= 9.[illegible]212\times10^{-[illegible]}$

(2) 系统的频率响应函数

对(1)式两边进行拉氏变换，再令 $s=if$，代入得

$$H_{xz}(f)=\frac{Z(f)}{X(f)}=\frac{\omega_0^2+i\,4\,\pi\xi\omega_0 f}{\omega_0^2-(2\,\pi f)^2+i\,4\,\pi\xi\omega_0 f}.$$

(3) 顶端位移响应的自谱

$$W_{zz}(f)=|H_{xz}(f)|^2W_{xx}(f)$$

$$=|H_{xz}(f)|^2\frac{1}{(2\,\pi f)^4}W_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)$$

$$=\frac{1+\left(2\,\xi\,\frac{2\,\pi f}{\omega_0}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{2\,\pi f}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(2\,\xi\,\frac{2\,\pi f}{\omega_0}\right)^2}\times$$

$$\frac{1}{(2\,\pi f)^4}\cdot\frac{cf^2}{(a+f^4)(b+f^2)}.$$

(4) 响应的均方值，可应用公式(6-3)，即

$$E[z^2]=\int_0^\infty W_{zz}(f)df$$

$$=\frac{1.92\times10^6g^2}{(2\,\pi)^4}\int_0^\infty\frac{1}{f^2(208.5+f^4)(4+f^2)}\times$$

$$\frac{1+(1.687\,f)^2}{[1-(2.108\,f)^2]^2+(1.687f)^2}df,$$

采用数值积分的列表法，可以得到

$$E[z^2]=\frac{1.92\times10^6g^2}{(2\,\pi)^4}\sum_{i=1}^{17}\frac{\Delta f_i}{f_i^2(208.5+f_i^4)(4+f_i^2)}\times$$

$$\frac{1+(1.687\,f_i)^2}{[1-(2.108\,f_i)^2]^2+(1.687\,f_i)^2}$$

$$=11.7330(g^2).$$

所以位移响应的均方根值

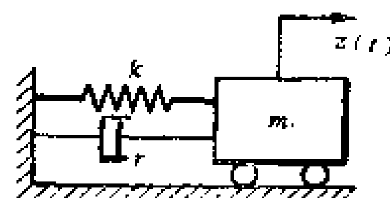
$\sqrt{E[z^2]}=3.4254\times981=3360.27$ 厘米 $=33.60$ 米.

该结果说明绝缘柱经不起这样大的地震。

例题 6-20 例题图 6-20-1 所示为水塔的最简振动模型，假设水平方向的地震波激励$x(t)$是零均值的白噪声随机过程，求水塔顶端绝对位移响应$z(t)$的自谱之一般形式.



例题图 6-20-1



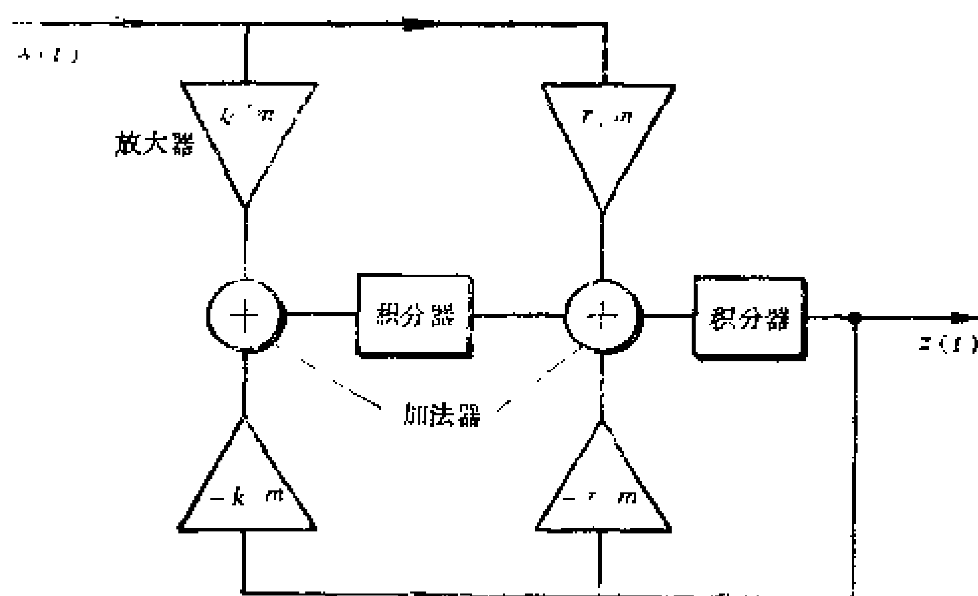
例题图 6-20-2

解：水塔简化为单自由度系统，见图 6-20-2。图中 m，k，r 分别为从能量等效算出的当量质量、当量刚度和当量阻尼。则系统的运动微分方程为

$$m\ddot{z}(t)+r\dot{z}(t)+kz(t)=r\dot{x}(t)+kx(t), \tag{1}$$

对应于(1)式的频率响应函数为

$$H_{xz}(f)=\frac{ri2\pi f+k}{m(i2\pi f)^2+r(i2\pi f)+k}.$$



例题图 6-20-3

题意已假设了激励谱为白噪声，即

$$S_{xx}(f)=S_0,$$

所以

$$\begin{aligned}S_{zz}(f)&=S_0|H(f)|^2\\&=\frac{q[r^2(2\pi f)^2+k^2]}{m^2(2\pi f)^4+(r^2-2km)(2\pi f)^2+k^2}.\end{aligned}$$

为了进行电模拟试验，例题图 6-20-3 给出一种系统的方框图，这个系统与水塔振动系统相对应。

第六章习题

习题 6-1 系统的输入数、输出数与系统自由度数是否有关系？单输入单输出系统是否一定是一个单自由度系统？一个单自由度系统可否受到多输入？多自由度系统可否仅有一个输入？试举例说明。

习题 6-2 单自由度线性系统的阻尼系数可以通个半功率带宽表示，试写出半功率带宽的几种求法。

习题 6-3 试写出振动系统复频响应函数和脉冲响应函数的各种计算公式。

习题 6-4 对于单输入单输出系统，在 $S_{yy}(w)$和 $S_{xy}(\omega)$ 给定时，说明如何计算 $S_{xx}(\omega)$和 $H_{xy}(w)$。在这些计算公式中，有什么限制？

习题 6-5 线性系统的输入是随机过程 $x[t]$ 所产生的一个样本函数，$x[t]$的自谱密度为

$$S_{xx}(f)=\frac{(2\pi f)^2+3}{(2\pi f)^2+8},$$

系统的输出是由随机过程 $y[t]$ 产生的一个样本函数。$y[t]$的自谱密度为 $S_{yy}(f)=1$。求能满足这些要求所对应的稳定可实现系统的频率响应函数。

答案：
$$H_1(f)=\frac{i2\pi f+\sqrt{8}}{i2\pi f+\sqrt{3}},$$

或

$$H_2(f)=\frac{-i2\pi f+\sqrt{8}}{i2\pi f+\sqrt{3}}.$$

习题 6-6 考虑两个平稳随机过程 $x[t]$和 $y[t]$，它们之间通过下列微

分方程相联系：

$$x(t)+A\dot{x}(t)+By(t)+C\dot{y}(t)=0.$$

试用过程 y[t]的自功率谱密度函数和实的常数 A，B，C 表示随机过程 x[t] 的自功率谱密度函数。

答案： $S_{xx}(\omega)=\dfrac{B^2+C^2\omega^2}{\omega^4+A^2\omega^2}S_{yy}(\omega)$.

习题 6-7 已知微分系统的频率响应函数为 $H(f)=i2\pi f$，若激励自谱为$S_{xx}(f)$，求响应自谱 $S_{yy}(f)$。

答案： $S_{yy}(f)=(2\pi f)^2S_{xx}(f)$.

习题 6-8 随机过程 x[t]和 y[t]由下式相联系

$$y(t)=\frac{1}{2\Delta}\int_{t-\Delta}^{t+\Delta}x(u)du,$$

上式的运算称为过程的平滑。若已知 x[t]的谱密度为 $S_{xx}(\omega)$，试求 $y(t)$ 的自谱密度函数。

答案： $S_{yy}(\omega)=\dfrac{\sin^2\omega\Delta}{(\omega\Delta)^2}S_{xx}(\omega)$.

习题 6-9 车辆振动的单自由度简化模型如例题图 6-8-1 所示。若记质量的相对位移 $y(t)=z(t)-x(t)$，已知路面不平度的激励谱为 $S_{xx}(\omega)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$，测得相对位移响应和绝对位移响应的均方值分别为 $E[y^2]$和 $E[z^2]$，试由此确定系统的固有频率 ω_0 和无量纲阻尼因子 ξ。

答案：

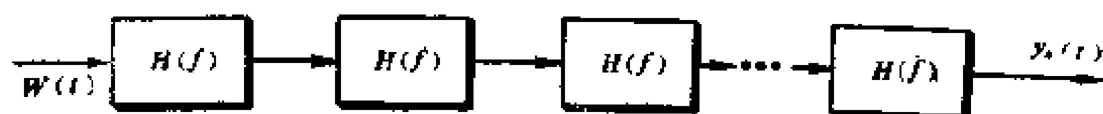
$$\zeta=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}a\pi-\frac{\alpha^2E[y^2]}{A+2\alpha}}{AE[y^2]}},$$

$$\omega_0=A\zeta,$$

式中

$$A=\frac{2\alpha\left\{E[z^2]-\frac{a\pi}{\alpha}+\frac{\alpha E[y^2]E[z^2]}{a\pi}\right\}}{E[y^2]-E[z^2]+\frac{a\pi}{\alpha}}.$$

习题 6-10 用相同系统串联起来的线性系统如图所示。输入 $W(t)$是具有零均值的白噪声随机过程的一个样本函数，其自谱的高为单位谱密度。每个系统的频率响应函数为



习题图 6-10

$$H(f)=\frac{(C_n)^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{i2\pi f}{\sqrt{n}\,k}},$$

式中 C_n 是一个可调节的常数，若欲使响应均方值 $E[y_n^2(t)]=1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{y_n y_n}(f)$。

答案：
$$S_{y_\infty y_\infty}(f)=C_\infty^4 e^{-\frac{(2\pi f)^2}{k^2}},$$

$$C_\infty=\frac{2^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{8}}}{k^{\frac{1}{4}}}.$$

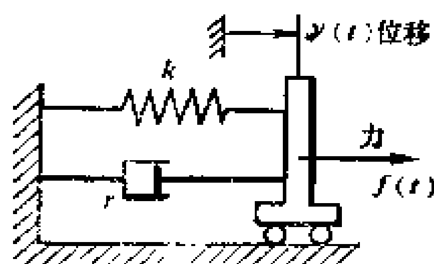
习题 6-11 如图所示无质量小车所受的力激励 $f[t]$ 是平稳随机过程，且 $f[t]$ 的自功率谱密度为 $S_{ff}(\omega)=S$. $(-\infty<\omega<\infty)$。

(a) 求位移响应 $y(t)$ 的自功率谱密度函数；

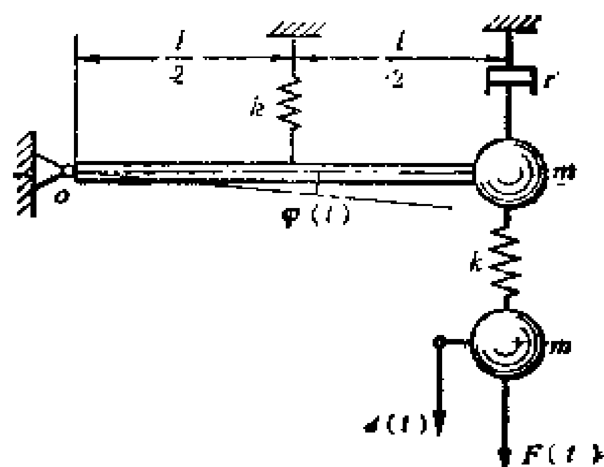
(b) 用式

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\phi_{ff}(\tau-u_2-u_1)h(u_1)h(u_2)du_1du_2$$

求 $y(t)$ 的自相关函数；



习题图 6-11



习题图 6-12

(c) 证明 $y(t)$ 的自功率谱密度与自相关函数组成付里叶变换对。

答案： (a) $S_{yy}(\omega)=\dfrac{S_0}{k^2+r^2\omega^2}$，

(b) $\phi(\tau)=\dfrac{\pi S_0}{kr}e^{-\frac{k}{r}|\tau|}$ 。

习题 6-12 如图所示振动系统，在质量 m 上受力激励 $F(t)$，激励谱为 $\dfrac{a^2}{a^2+\omega^2}$，杆重不计，弹簧刚度为 k，求系统绝对位移响应 $z(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的谱密和平均动能。

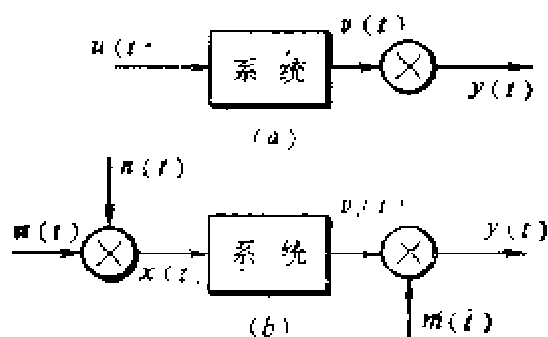
答案：

$$S_{zz}(\omega)=\frac{a^2}{a^2+\omega^2}\left[\frac{\frac{5}{4}k+ir\omega-m\omega^2}{(k-m\omega^2)\left(\frac{5}{4}k+ir\omega-m\omega^2\right)-k^2}\right]^2,$$

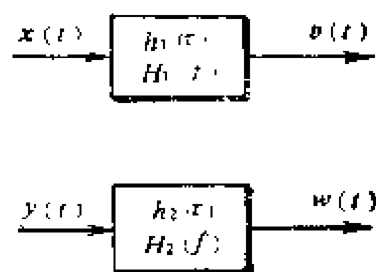
$$S_{\varphi\varphi}(\omega)=\frac{a^2}{a^2+\omega^2}\left[\frac{k/l}{(k-m\omega^2)\left(\frac{5}{4}k+ir\omega-m\omega^2\right)-k^2}\right]^2.$$

$$E[T]=\frac{ma^2}{2rk}\left(\frac{\frac{181}{64}k+\frac{17}{16}ar+\frac{33}{16}a^2m+\frac{r^2}{4m}-\frac{a^2r^2}{k}+\frac{ar^3}{km}}{\frac{1}{4}k+ar+\frac{9}{4}a^2m+\frac{m^2a^4}{k}+\frac{a^3rm}{k}}\right).$$

习题 6-13 如图所示测量系统的输入 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别受到噪声 $n(t)$ 和 $m(t)$ 的干扰，干扰后的输入 $x(t)=u(t)+n(t)$，输出 $y(t)=v(t)+m(t)$。若以上各随机过程都是平稳的，且噪声与原输入，噪声与原输出以及噪声之间均互不相关。已知



习题图 6-13



习题图 6-14

$$S_{uu}(f)=\frac{1}{1+4f^2},$$

$$H_{uv}(f)=\frac{4}{1-9f^2+i\,2f},$$

$$S_{nn}(f)=5,\quad S_{mm}(f)=0.$$

求：(a) $S_{vv}(f)$和$S_{uv}(f)$；

(b) $\gamma^2_{uv}(f)$和$\gamma^2_{xy}(f)$。

答案：$$S_{vv}(f)=\frac{16}{(1+4f^2)[(1-9f^2)^2+4f^2]},$$

$$S_{uv}(f)=\frac{4}{(1-9f^2+i\,2f)(1+4f^2)},$$

$$\gamma^2_{uv}(f)=1,$$

$$\gamma^2_{xy}(f)=\frac{1}{6+20f^2}.$$

习题 6-14 系统1、2的动态特性以及输入、输出情况如图所示。根据互谱$S_{vw}(f)$为互相关$\phi_{vw}(\tau)$的付里叶变换这一关系，试证明

$$S_{uw}(f)=H_1(f)H_2^*(f)S_{xx}(f),$$

式中$H_2^*(f)$是$H_2(f)$的复共轭。

习题 6-15 如图所示线性反馈系统中，输入$x[t]$和$n[t]$是独立无关的平稳随机过程，若已知$S_{xx}(f)$，$S_{nn}(f)$及系统的动态特性，求$S_{yy}(f)$及$S_{ee}(f)$。

[提示：对于线性系统，有$y(t)=y_x(t)+y_n(t)$，式中$y_x(t)$、$y_n(t)$分别为$x(t)$和$n(t)$引起的输出。]

答案：

$$S_{yy}(f)=\left|\frac{G(f)k(f)}{1+G(f)k(f)}\right|^2 S_{xx}(f)+\left|\frac{k(f)}{1+G(f)k(f)}\right|^2 S_{nn}(f),$$

$$S_{ee}(f)=\left|\frac{1}{1+G(f)k(f)}\right|^2 S_{xx}(f)+\left|\frac{-k(f)}{1+G(f)k(f)}\right|^2 S_{nn}(f).$$

式中$G(f)$、$K(f)$分别为脉冲响应函数$g(t)$，$k(t)$的付里叶变换。

习题 6-16 如图所示电路系统的传递函数为$H(f)=\dfrac{1}{RC(i\,2\pi f)+1}$，图中$v_1(t)$是一个二元传输电压波，其自相关函数为

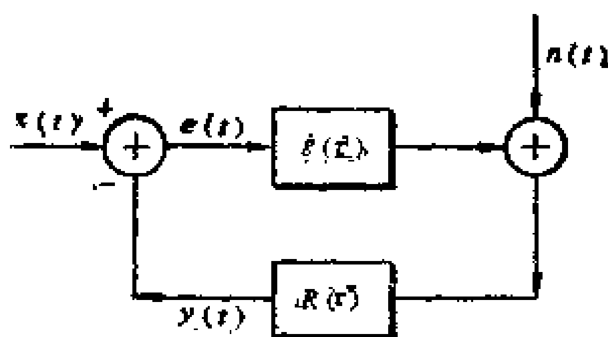
$$
\phi_{v_1v_1}(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T} & (|\tau|\leqslant T),\\ 0 & (|\tau|>T).\end{cases}
$$

若规定 $e(t)=v_1(t)-v_2(t)$，求 $S_{ee}(t)$。

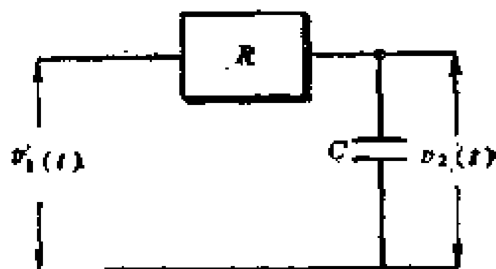
答案：

$$
S_{ee}(f)=S_{v_1v_1}(f)|H(f)-1|^2
$$

$$
=T\frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}\cdot\frac{(Rc)^2(2\pi f)^2}{(Rc)^2(2\pi f)^2+1}.
$$



习题图 6-15



习题图 6-16

习题 6-17 如图所示L型控制杆(杆重不计)的右端有集中重量 P，重物受力激励 $f(t)$，已知激励自谱 $S_{ff}(\omega)=\dfrac{S_0}{1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$，求L型杆的角位移响应的自谱和均方值。

答案：

$$
S_{\theta\theta}(\omega)=\left[\left(\frac{a^2k}{R}-\frac{PR}{g}\omega^2\right)^2+\left(\frac{Rr\omega}{4}\right)\right]^{-1}\frac{S_0}{1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}.
$$

$$
E[\theta^2]=\frac{\pi S_0\omega_0\left(4\dfrac{P}{g}\omega_0+r\right)}{a^2Rr\left(\dfrac{P}{g}\omega_0^2+\dfrac{a}{R^2}P+\dfrac{r}{4}\omega_0\right)}
$$

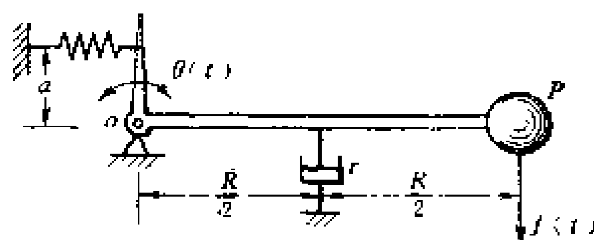
习题 6-18 如图所示系统，最上面的质量 m 上受到力激励 $F(t)$，其自谱 $S_{FF}(\omega)=S_0$，求位移响应 $z_1(t)$和 $z_2(t)$的自功率谱密度函数。

答案：

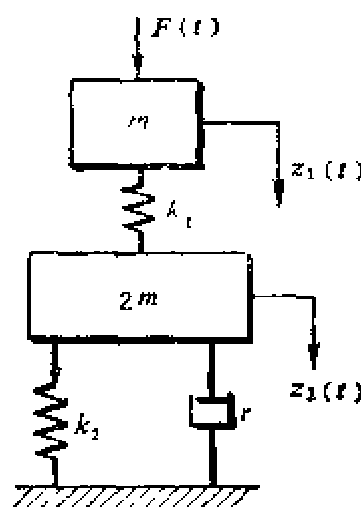
$$S_{z_1z_1}(\omega)=S_0\left|\frac{k_1+k_2-2m\omega^2+ir\omega}{(k_1-m\omega^2)(k_1+k_2-2m\omega^2+ir\omega)-k_1^2}\right|^2,$$

$$S_{z_2z_2}(\omega)=S_0\left|\frac{k_1}{(k_1-m\omega^2)(k_1+k_2-2m\omega^2+ir\omega)-k_1^2}\right|^2.$$

习题 6-19 如图所示为双摆系统，质量 m_1 的球通过弹簧 k 与基础相连，已知基础位移 $x(t)$ 的激励谱 $S_{xx}(\omega)=S_0$，求系统转角响应 $\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$ 的自谱。



习题图 6-17



习题图 6-18

答案：

$$S_{\varphi_1\varphi_1}(\omega)=|H_{x\varphi_1}(\omega)|^2S_0,$$
$$S_{\varphi_2\varphi_2}(\omega)=|H_{x\varphi_2}(\omega)|^2S_0,$$

式中

$$H_{x\varphi_1}(\omega)=$$

$$\frac{k(g-l_2\omega^2)}{l_1l_2m_1\omega^4-[l_2(kl_1+m_1g+m_2g)+gl_1(m_1+m_2)]\omega^2+g(kl_1+m_1g+m_2g)},$$

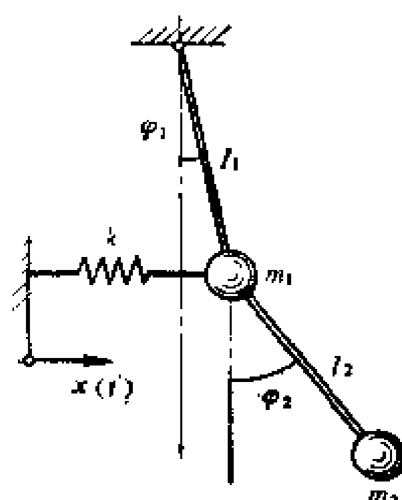
$$H_{x\varphi_2}(\omega)=$$

$$\frac{kl_1\omega^2}{l_1l_2m_1\omega^4-[l_2(kl_1+m_1g+m_2g)+gl_1(m_1+m_2)]\omega^2+g(kl_1+m_1g+m_2g)}.$$

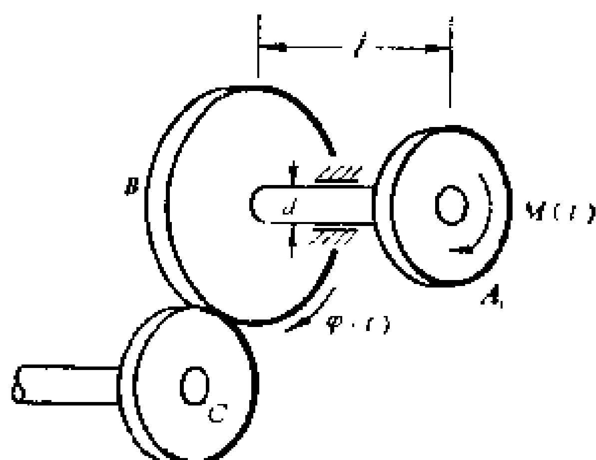
习题 6-20 已知某传动轴的输入转矩为 $M(t)$ 输出为角位移 $\varphi(t)$，A 轮的转动惯量为 J_A，实心轴的直径为 d，材料剪切模量为 G，无量阻尼因子为 ξ 若输入自谱为白噪声，即 $S_{MM}(f)=S_0$ 求角位移响应的输出谱和均方值。

答案：

$$S_{\varphi\varphi}(\omega)=\frac{S_0}{J_A^2}\left|\frac{1}{-\omega^2+2\xi\omega_n i\omega+\omega_n^2}\right|^2,$$



习题图 6-19



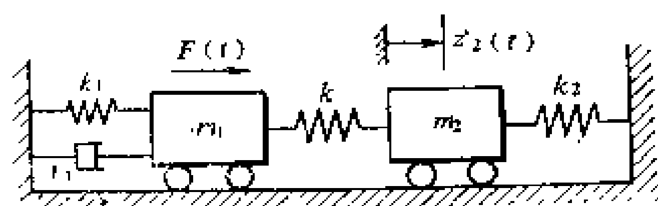
习题图 6-20

式中

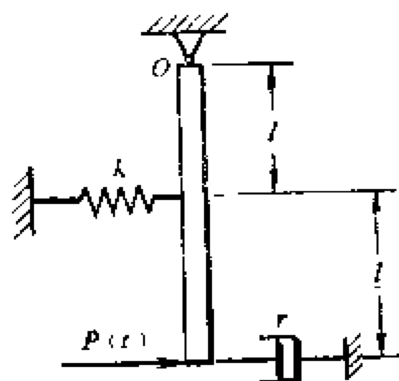
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J_A}},$$

$$k = \frac{\pi d^4 G}{32\, l};$$

$$E[\varphi^2] = \frac{64\, S_0 \Pi}{\zeta G d^8}\sqrt{\frac{2l}{\pi G J_A}}。$$



习题图 6-21



习题图 6-22

习题 6-21 对于如图所示的两自由度振动系统，试确定输入是随机力 $F(t)$，输出为随机位移 $z_2(t)$ 时，它们之间的频率响应函数 $H_{Fz_2}(\omega)$，并由此求当 $F(t)$ 的谱密度为 $S_{FF}(\omega)=S_0$（常数）时质量 m_2 的动能平均值。

答案：

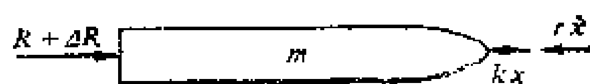
$H_{Fz_2}(\omega)=$

$$\frac{k}{m_1 m_2 \omega^4 - i m_2 r \omega^3 - [(k_1+k_2)m_2+(k_2+k)m_1]\omega^2 + i(k_1+k) r\omega + k_1 k_2 + k(k_1+k_2)},$$

$$E[T]=\frac{\pi S_0}{2r}.$$

习题 6-22 长为 $2l$ 的无质量摆杆，在其一端受到随机力 $P(t)$ 的激威如图所示。已知单边激励谱 $W_{pp}(f)=W_0$，为有限带宽白噪声，在带宽分别为(a) $f=0-\frac{K}{r}$、(b) $f=0-10\frac{K}{r}$，(c) $f=0-100\frac{K}{r}$ 三种情况下，如果近似把激励谱当作无限带宽的白噪声，求在上述三种情况下相对误差各是多少？由此说明什么问题？

答案：



习题图 6-23

(a) 10%，(b) 1%，(c) 0.1%。

习题 6-23 在质量为 m 的鱼雷上装了一只加速度计，以便测量鱼雷在流体中运动的加速度随时间的变化图线。设流体对鱼雷的粘性阻尼系数为 r，弹性系数为 k，鱼雷在推力 R 的作用下运动，若推力还具有平稳随机分量 $\Delta R(t)$，且已知 ΔR 的数学期望 $m_{\Delta R}=0$，ΔR 的自相关函数为：

$$\phi_{\Delta R\Delta R}(\tau)=D_{\Delta R}e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta|\tau|+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

(a) 解释 $\phi_{\Delta R\Delta R}(\tau)$ 计算公式中 α,β,τ 的含义；

(b) 求 ΔR 的自谱；

(c) 求由于推力随机变化 ΔR 引起的随机位移 Δx_1 的频率响应函数和自谱；

(d) 求鱼雷在 x 位移的方差。

答案：

(b) $S_{\Delta R\Delta R}(\omega)=\frac{2D_{\Delta R}\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}$，

(c) $H_{\Delta R\Delta x_1}(\omega)=\frac{1}{m(-\omega^2+2in\omega+\omega_0^2)}$，

式中

$$2n=r/m,\quad \omega_0^2=k/m$$

$$S_{\Delta x_1\Delta x_1}(\omega)=\frac{2D_{\Delta k}\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{m^2|-\omega^2+2ni\omega+\omega_0^2|^2|-\omega^2+2\alpha i\omega+\alpha^2+\beta^2|^2},$$

(d) $D_{\Delta x_1}=$

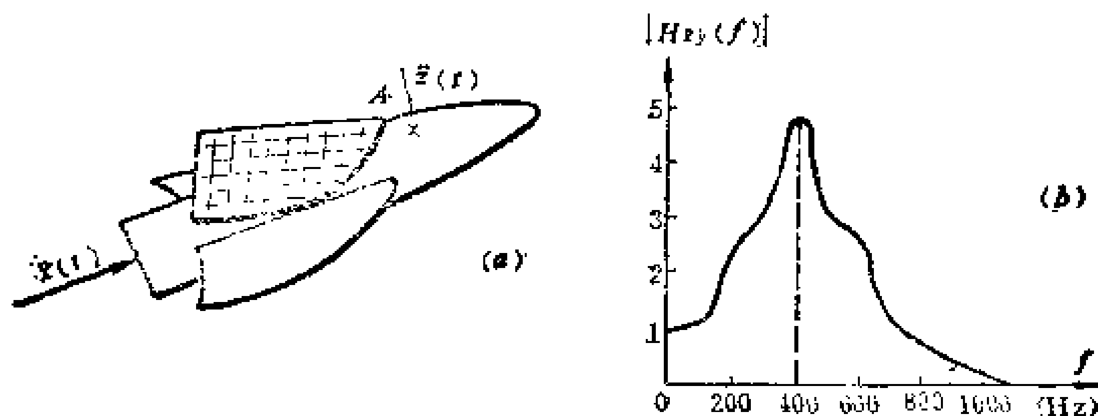
$$\frac{2\pi D_{\Delta k}\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{m^2[(\omega_d-\beta)^2+(n-\alpha)^2][(\omega_d+\beta)^2+(n-\alpha)^2]}\cdot\left\{\frac{\Delta}{n(n^2+\omega_d^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\right\},$$

式中

$$\Delta=(-\beta^2+\omega_d^2+n^2+\alpha^2)^2+4(n^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2+\alpha^4-2n^2\alpha^2+\alpha^2\omega_d^2),$$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-n^2},$$



习题图 6-24

习题 6-24 航天器上有一高增益天线，如习题图 6-24(a)所示，已测得天线上A点在受到加速度激励时加速度响应的频率响应函数 $H_{\ddot{z}\ddot{x}}(f)$，如习题图 6-24(b)所示，测量的频率范围从 20 赫到 1000 赫，由图可见在 400 赫处有一谐振尖峰。若加速度激励为具有不变谱密度 $S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)=0.1\,g^2$/赫的白噪声随机过程，试用列表法计算A点加速度响应的均方根近似值。

答案：

$$\sqrt{E[\ddot{z}^2]}=\sqrt{617.9\,g^2}=24.9(g).$$

习题 6-25 一个电子仪器用四根软橡皮缓冲器支承，它们都位移了4.5毫米。若仪器的加速度响应均方值必须小于 $4\,g^2$，试用均方带宽近似法求出它最多能承受幅值 S_0 为多少的有限带宽白噪声加速度激励谱？（已知阻尼系数 $\zeta=0.05$，$0<|\omega|\leqslant\omega_0=60\pi$.）

答案：

$$S_0 \leqslant 0.00282(g^2/\text{弧度}/\text{秒}).$$

参 考 文 献

[1] J.D.罗伯逊，随机振动引论，湖南科学技术出版社，1980。
[2] 下乡太郎，随机振动，科技文献出版社重庆分社，1976。
[3] 庄表中、王行新，随机振动概论，地震出版社，1982。
[4] 星谷胜，随机振动分析，地震出版社，1977。
[5] 得丸英胜，振动论，コロナ社，1973，
[6] 神保泰雄，古川英一，工业振动学演习，学献社，1964，
[7] Robert, F, Steidel, Jr., An Introduction to Mechanical Vibrations, John Wiley & Sons, 1979.

第七章　损坏理论

零件、设备或系统在使用过程中，因为疲劳、磨损或意外事故，将逐渐（或突然）不能正常工作，这种现象称为损坏。在损坏前的工作时间，称为使用寿命，它是衡量产品使用价值的一个重要指标

一些重要的零、部件和设备（例如飞机发动机，核反应堆的冷却水泵，大型发电设备等），它们的损坏将会造成重大的事故和经济损失，必须在其使用寿命结束前予以更换，因此正确地估计其使用寿命具有特殊意义。众所周知，一批尺寸、外形、材料和加工方法都完全相同的机械设备或零件，其使用寿命会有长有短。这是因为这里所说的"完全相同"，只是对某一衡量范围（例如某个公差范围）而言的，实际上还是千差万别、随机地变化的；更重要的还因为它们所受环境条件（载荷、温度、压力等）常常是随机的。因而必须应用处理随机变量的概率和统计方法，建立正确的损坏理论，以便：

（1）在可靠性意义下进行使用寿命或有限寿命设计。

（2）建立判别系统"安全可用"的标准，统一对"损坏"的认识和试验方法。

（3）为振动试验建立损伤等效、相互作用等效技术

一个正确的损坏理论，应该经得起工程实践中长期的检验，且易被人们所接受。

一、内容提要

1．可靠度概念

可靠度表示零件、设备或系统在规定时间内和规定使用条件下，保证其成功的概率，记作 $R(t)$，不可靠度记作 $F(t)$，则

有

$$R(t)+F(t)=1.$$

2. 损坏的两种类型

(1) 首次超越损坏

响应 $y(t)$首次超过一个上限 U 或一个下限 L，系统即遭损坏。

(2) 累积损伤

响应 $y(t)$虽然满足上述不超越的前提，随机地在小或中等量值范围内波动，但也可能在经过一段时间后发生损坏，其原因是每次响应的波动，结构中有一定的损伤，当损伤累积到一定程度，不能再承受激励时，即认为已损坏。

3. 平稳、正态、窄带随机过程在幅域中的概率特征

(1) 跨过次数的期望值

$$N_a^+(T)=\nu_a^+T, \tag{7-1}$$

式中 $N_a^+(T)$为 T 时间内响应 $y(t)$以正斜率跨过 $y=a$ 的次数的集合平均值；

ν_a^+ 是以正斜率跨过 $y=a$ 的期望频率（单位时间内跨过次数的期望值）；

T 为时间过程。

(2) 期望频率 ν_a^+ 的求法

$$\nu_a^+=\int_0^\infty \dot{y}p(a,\dot{y})d\dot{y}, \tag{7-2}$$

式中 $p(a,\dot{y})$ 为响应的二维概率密度函数 $p(y,\dot{y})$ 在 $y=a$ 时的值

当 $p(y,\dot{y})$为正态分布时，(7-2)式可写成

$$\nu_a^+=\frac{\sigma_{\dot{y}}}{2\pi\sigma_y}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}}, \tag{7-3}$$

式中 $\sigma_{\dot{y}}$ 是响应的导数 $\dot{y}$ 之标准离差，

σ_y 是响应 $y(t)$之标准离差。

当 $a=0$ 时，(7-3)式变为

$$\nu_0^- = \frac{\sigma_{\dot{y}}}{2\pi\sigma_y}, \tag{7-4}$$

式(7-4)表示系统的响应跨过 $y=0$ 的平均频率，也就是振动系统固有频率 f_0 的另一种表示式，记 $\omega_0 = 2\pi f_0$，则有

$$\omega_0^2 = \frac{\sigma_{\dot{y}}^2}{\sigma_y^2} = \frac{-\phi_{\dot{y}\dot{y}}(0)}{\phi_{yy}(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{yy}(\omega)\,d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega)\,d\omega}, \tag{7-5}$$

式中　$S_{yy}(\omega)$是响应 $y(t)$的自谱；

$\phi_{\dot{y}\dot{y}}(0)$是响应 $y(t)$的导数的均方值；

$\phi_{yy}(0)$是响应的均方值。

(3) 响应峰值的概率密度函数 $p_p(a)$

$$p_p(a) = -\frac{1}{\nu_0^+} \cdot \frac{d}{da}(\nu_a^+)$$

$$= \frac{a}{\sigma_y^2} e^{-a^2/2\sigma_y^2}. \tag{7-6}$$

(4) 非小窄带响应峰值的频率 μ_y

$$\mu_y = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{5}\frac{(\omega_2^5 - \omega_1^5)}{(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}. \tag{7-7}$$

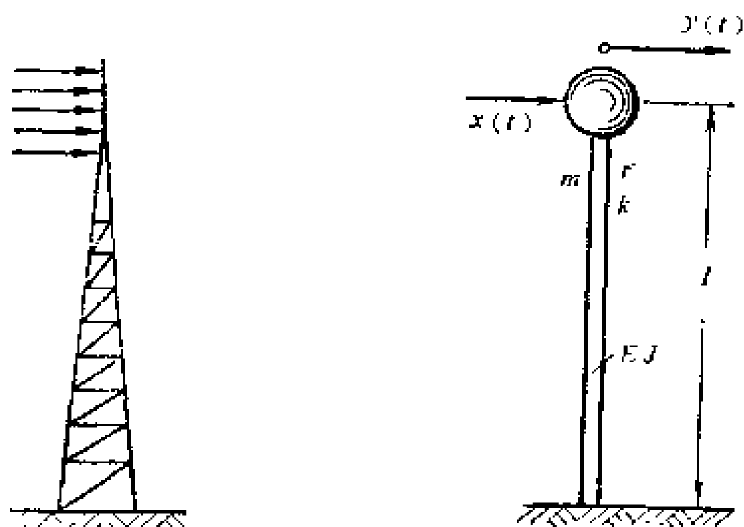
(5) 非小窄带跨越 $y=0$ 的频率

$$\nu_{y=0}^+ = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\omega_2^3 - \omega_1^3)}{3(\omega_2 - \omega_1)}}. \tag{7-8}$$

在小窄带，即 $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \ll \omega_0$（$\omega_0$ 是系统的固有频率）的情况下，峰值的频率 μ_y 和跨越 $y=0$ 的频率 $\gamma_{y=0}^+$ 是相同的，因为小窄带时不易发生混杂现象。

二、例　　题

例题 7-1　电视塔受随机风力激励而振动，最简单的振动简化模型为单自由度系统（见图 7-1（a））、已知风力激励谱 $S_{FF}(\omega) = S_0$（公斤²·秒）$(20\pi \leqslant |\omega| \leqslant 4000\pi)$，求塔杆顶部位移响应



例题图 7-1-1

$y(t)$超过 a 值的期望频率

解：应用变形能等效原理，得系统的等效刚度

$$k=\frac{3EJ}{l^3},$$

由结构的耗散能等效，得结构等效粘性阻尼 r，由系统的动能等效得等效质量 m。于是简化模型的运动微分方程为：

$$m\ddot{y}(t)+r\dot{y}(t)+ky(t)=x(t), \tag{1}$$

端点力激励 $x(t)$引起质量 m 位移响应 $y(t)$的频率响应函数为

$$H_{xy}(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2-ir\omega}. \tag{2}$$

由于激励谱在 $\omega=0$ 处不存在 δ 函数，因而位移响应及响应的导数在 $\omega=0$ 处也不会有 δ 函数，故有

$$\begin{cases} m_y=0, \\ m_{\dot{y}}=0, \\ C_{y\dot{y}}=0, \end{cases} \tag{3}$$

响应的方差

$$\sigma_y^2=E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(\omega)d\omega$$

$$=2S_0\int_{20\pi}^{6000\pi}\left|\frac{1}{-m\omega^2-ir\omega-k}\right|^2 d\omega. \tag{4}$$

若输入为理想白噪声，则上式的积分限为 $-\infty$—∞，应用附录中的詹姆斯公式，立即可得

$$\sigma_y^2=\frac{\pi S_0}{kr}.$$

现在输入是有限带宽等幅谱，假定系统的阻尼很小，且均方带宽（指系统固有频率 ω_n 两侧宽为 $\frac{\pi r}{2m}$ 的频带）落在激励谱的频率范围之内，则可以近似地得

$$\sigma_y^2\doteq\frac{\pi S_0}{kr}. \tag{5}$$

如果系统的阻尼不很小，或者均方带宽落在激励谱的频率范围之外，则（4）式可用数值积分法计算

又端点力激励引起位移响应之导数（速度）的频率响应函数为

$$H_{x\dot{y}}(\omega)=\frac{i\omega}{k-m\omega^2+ir\omega}, \tag{6}$$

应用和前面同样的假定，得

$$\sigma_{\dot{y}}^2=E[\dot{y}^2]=2S_0\int_{20\pi}^{4000\pi}\left|\frac{r\omega}{k-m\omega^2+ir\omega}\right|^2 d\omega\doteq\frac{\pi S_0}{rm}. \tag{7}$$

设 $y(t)$ 和 $\dot{y}(t)$ 服从联合正态分布，则塔杆顶部位移响应超过 $y=a$ 的期望频率为

$$\nu_a^+=\frac{\sigma_{\dot{y}}}{2\pi\sigma_y}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}}\doteq\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\frac{a^2kr}{2\pi S_0}}. \tag{8}$$

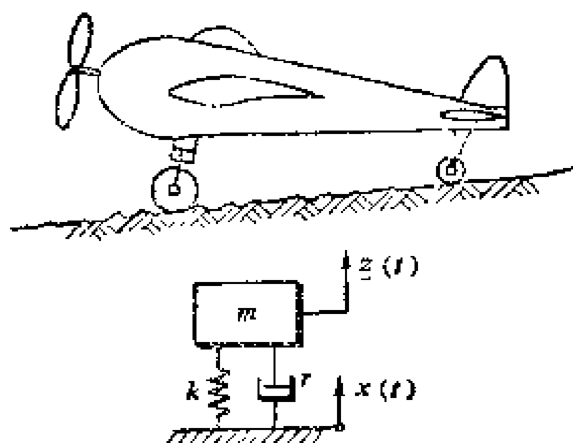
例题 7-2 例题图 7-2 1 所示的飞机降落时在跑道上滑行，起落架受跑道位移激励。若起落架承受的质量为 m，起落架的当量阻尼系数为 r，当量刚度为 k，跑道激励谱 $S_{xx}(\omega)=\frac{c}{\omega^2}(4\pi\leq|\omega|\leq 60\pi)$，求起落架相对位移响应 $y(t)$ 超过 a 的期望频率。

解：设起落架的铅垂相对位移为 $y(t)$，绝对位移为 $z(t)$，跑道的高低不平度为 $x(t)$，系统的简化模型见图所示，则描述起

落架的运动微分方程为：

$$m\ddot{z}=-r(\dot{z}-\dot{x})-k(z-x),$$

即 $$m\ddot{y}+r\dot{y}+ky=-m\ddot{x},$$



例题图 7-2-1

路面高低不平度的加速度激励引起系统相对位移和相对速度响应的频率响应函数分别为：

$$H_{\ddot{x}y}(\omega)=\frac{-m}{k-m\omega^2+ir\omega},\quad (2)$$

$$H_{\ddot{x}\dot{y}}(\omega)=\frac{-im\omega}{k-m\omega^2+ir\omega},\quad (3)$$

而加速度激励谱为

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)=\omega^2 S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)=\omega^4 S_{xx}(\omega)=\omega^2 c(4\pi\leqslant|\omega|\leqslant 60\pi). \quad (4)$$

设激励是平稳正态随机过程，且从（4）式可知，$\omega=0$ 处 $S_{\ddot{x}\ddot{x}}(0)=0$，即 $E[\ddot{x}]=0$，因而有 $E[y(t)]=0$，响应也是平稳正态随机过程，从而有 $E[y(t)]=0$，$E[y\dot{y}]=0$，所以

$$\sigma_y^2=E[y^2]=2\int_{4\pi}^{60\pi}\left|H_{\ddot{x}y}(\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)d\omega$$

$$=2cm^2\int_{4\pi}^{60\pi}\frac{\omega^2 d\omega}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}, \quad (5)$$

类似可得

$$\sigma_{\dot{y}}^2=E[\dot{y}^2]=2\int_{4\pi}^{60\pi}\left|H_{\ddot{x}\dot{y}}(\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)d\omega$$

$$=2cm^2\int_{4\pi}^{60\pi}\frac{\omega^4 d\omega}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}. \quad (6)$$

所以响应以正斜率跨过 $y=a$ 的期望频率计算公式为

$$\nu_a^+=\frac{\sigma_{\dot{y}}}{2\pi\sigma_y}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$
=\frac{\displaystyle\int_{4\pi}^{60\pi}\frac{\omega^4 d\omega}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}}{2\pi\displaystyle\int_{4\pi}^{60\pi}\frac{\omega^2 d\omega}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}}\times
$$

$$
\times\exp\left[\frac{-a^2}{4cm^2\displaystyle\int_{4\pi}^{60\pi}\frac{\omega^2 d\omega}{(k-m\omega^2)^2+r^2\omega^2}}\right]. \qquad (7)
$$

讨论：(1) 在(7)式中，用不同的 a 值代入，即得各 ν_a^+ 值。再应用累积损伤公式，可以计算起落架的有限寿命或使用时间。

(2) 起落架为飞机的重要部件，它的损坏将造成重大事故、用上述理论进行设计，更接近真实情况，因而也更安全可靠和经济。

(3) 显然，上述设计的精度取决于 m、r、k 等参数及激励谱 $S_{xx}(\omega)$的精度。一般路面谱采用$\frac{c}{\omega^2}$的型式还是较多的（参见例题 9-1）。

例题 7-3 一应力响应 $y(t)$为正态、窄带随机过程，求 $y(t)$的峰值超过 $4\sigma_y$ 的概率，又 $y(t)$的峰值超过何值的概率小于万分之一？

解：$y(t)$的峰值超过 $4\sigma_y$ 的概率为

$$
p(a)\Big|_{a=4\sigma_y}=\int^{\infty}p_p(a)da
$$

$$
=\frac{\nu_a^+}{\nu_0^+}=e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}}\Big|_{a=4\sigma_y}
$$

$$
=e^{-8}=0.0003355.
$$

计算结果表明：响应波在 10000 个峰值中平均有 3 个多一点可能超过 $4\sigma_y$值。

欲使

$$
P(a)|_{a=x}<0.0001
$$

即

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma_y^2}}<0.0001,$$

两边取自然对数

$$-\frac{x^2}{2\sigma_y^2}<\ln 0.0001=-9.210,$$

$$\therefore \qquad x>4.292\,\sigma_y.$$

故 $y(t)$的峰值超过 $4.292\,\sigma_y$ 的概率小于万分之一。

例题 7-4 已知响应 $y(t)$是正态平稳随机过程，响应谱在 500—700 赫的范围内为常数值 S_0，在其它频率范围内为零。试计算极大值频率和 $y=0$ 处的跨过频率

解： 因为 $\Delta f=700-500=200$(赫)，中心频率 $f_0=600$ 赫，本题的响应谱属于非小窄带，$\mu_y\neq\nu_{y=0}^+$。

从题意所给的响应谱可知，在 $\omega=0$ 处无 δ 函数，因而 $m_y=0$，则

$$\sigma_y^2=E[y^2]=\int_0^{\infty}S(f)\,df=\int_{500}^{700}S_0\,df=200\,S_0,$$

$$\therefore \qquad \sigma_y=14.1421\sqrt{S_0}\ . \tag{1}$$

$$\sigma_{\dot y}^2=E[\dot y^2]=4\pi^2\int_{500}^{700}f^2S_0\,df=\frac{4\pi^2}{3}S_0f^3\Big|_{500}^{700}$$

$$=4\pi^2\times 7.2667\times 10^7 S_0,$$

$$\therefore \qquad \sigma_{\dot y}=2\pi\times 8.5245\times 10^3\sqrt{S_0}\ . \tag{2}$$

$$\sigma_{\ddot y}^2=16\pi^4\int_{500}^{700}f^4S_0\,df=\frac{16\pi^4}{5}S_0f^5\Big|_{500}^{700}$$

$$=16\pi^4\times 2.7364\times 10^{13}S_0,$$

$$\therefore \qquad \sigma_{\ddot y}=4\pi^2\times 5.2311\times 10^6\sqrt{S_0}\ . \tag{3}$$

将(2)、(3) 两式代入极大值频率的计算公式(7-7)

$$\mu_y=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\ddot y}}{\sigma_{\dot y}}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4\pi^2\times 5.2311\times 10^6\sqrt{S_0}}{2\pi\times 8.5245\times 10^3\sqrt{S_0}}=613.65(\text{赫}).$$

将 (1)、(2) 两式代入跨越 y＝0 的频率的计算公式 (7-8)，得

$$\nu_{\dot{y}=0}^{+}=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_{y}}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\times 8.5245\times 10^{3}\sqrt{S_0}}{14.1421\sqrt{S_0}}=602.77(\text{赫}).$$

讨论：(1) ν_0^+ 与 μ_s 基本上接近，说明波形混杂现象不显著。

(2) 本题 μ_s 与 ν_0^+ 也可直接应用公式计算

$$\mu_s=\sqrt{\frac{3(f_2^5-f_1^5)}{5(f_2^3-f_1^3)}},$$

$$\nu_{y=0}^{+}=\sqrt{\frac{(f_2^3-f_1^3)}{3(f_2-f_1)}}.$$

式中，$f_1=500$ 赫，$f_2=700$ 赫。

例题 7-5 设振动系统的固有频率为$\frac{\omega_0}{2\pi}=50$赫，响应的幅值服从正态分布。求系统在响应 $y(t)\geqslant 5\sigma_y$ 的条件下，可靠度为 99% 的寿命时间。

解：因为响应的幅值为正态分布，故它的峰值为瑞利分布，峰值超过 $a=5\sigma_y$ 的概率为

$$P(a)=e^{-a^2/2\sigma_y^2}=e^{-25\sigma_y^2/2\sigma_y^2}=e^{-12.5}$$

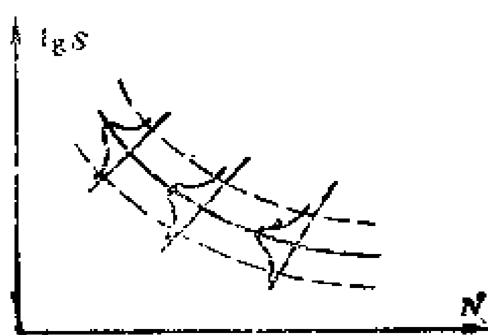
$$=3.7267\times 10^{-6},$$

则每秒钟内响应超过 $5\sigma_y$ 的期望振动次数为

$$\nu_{a=5\sigma_y}^{+}=\frac{\omega_0}{2\pi}e^{-a^2/2\sigma_y^2}=50\times 3.7267\times 10^{-6}$$

$$=1.8633\times 10^{-4}(\text{次/秒}).$$

作为一种近似，按系统受到单级载荷处理，并以 $5\sigma_y\leqslant y(t)\leqslant\infty$ 作为一个载荷等级（因为取得很大峰值的概率是极小的），设 $a=5\sigma_y$ 的情况下，系统被破坏时的循环次数为 N（按有限寿命观点），或者象普通碳钢那样，假



例题图 7-5-1

设 10^7 次（按定限寿命观点）为常规疲劳试验曲线给出的中值疲劳寿命，它只有 50%的置信度。而用概率法绘制的 P-S-N 曲线（见例题图 7-5-1）可知，寿命数据的对数值一般服从正态分布。将 50% 置信度的中值疲劳寿命换算成本题所要求的 99%置信度的寿命，可运算如下：

$$\Phi(z)=1-\left(\frac{1-0.99}{2}\right)=0.995.$$

查正态分布函数表得

$$z=2.575,$$

所以具有 99%置信度的期望循环次数为

$$N_{99\%}=\frac{N_{50\%}}{2.575}=\frac{10^7}{2.575}=3.8835\times10^6(\text{次}).$$

于是得 $y(t)\geqslant5\,\sigma_y$ 时，可靠度为 99%的寿命时间为

$$T=\frac{N_{99\%}}{\nu^+_{a=5\sigma_y}}=\frac{3.8835\times10^6}{1.8633\times10^{-4}}=2.0842\times10^{10}(\text{秒})$$

$$=5.7895\times10^6(\text{小时}).$$

上述计算是按单级载荷近似的。而实际上，系统受到的载荷往往是随机的，在这种情况下，上面的处理方法，既没有考虑小于 $5\,\sigma_y$ 的峰值引起的损伤，也没有考虑大于 $5\,\sigma_y$ 的峰值造成的损伤要比等于 $5\,\sigma_y$ 时严重，此外也未考虑载荷频率的影响，显然不能反映真实情况。为此，应将载荷分成若干级，根据系统所用材料的疲劳曲线，可知在各级期望载荷下的期望循环次数，进行寿命计算。国际上一般是分成 8 级，这是与 8 级程序加载疲劳试验机相对应的一种规定。本题中将响应 $y(t)$按（0—σ_y）、（σ_y—$2\,\sigma_y$）、（$2\,\sigma_y$—$3\,\sigma_y$）、（$3\,\sigma_y$—$4\,\sigma_y$）、（$4\,\sigma_y$—$5\,\sigma_y$）、（$5\,\sigma_y$—∞）分成 6 个通过区，记 $\nu^+_{a_i}$为响应超过 a_i 的期望频率（$a_i=i\sigma_y$，$i=0,1,2,3,4,5$），则

$$\text{Prob}(0\leqslant y\leqslant\sigma_y)=\int_0^{\sigma_y}p_p(a)\,da=\int_0^{\infty}p_p(a)da-\int_{\sigma_y}^{\infty}p_p(a)\,da$$

$$=e^{-0/2\sigma_y^2}-e^{-\sigma_y^2/2\sigma_y^2}=p(a_0)-p(a_1)$$

$$=1-0.6065=0.3935.$$

每秒钟内响应 $0\leqslant y(t)\leqslant\sigma_y$ 的期望次数为：

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\times 0.3935=19.67(\text{次/秒})=\nu_{a_0}^{+}-\nu_{a_1}^{+}.$$

用同样的方法可得

$$\nu_{a1}-\nu_{a2}=23.56(\text{次/秒}),$$
$$\nu_{a2}-\nu_{a3}=6.21\ (\text{次/秒}),$$
$$\nu_{a3}-\nu_{a4}=0.55\ (\text{次/秒}),$$
$$\nu_{a4}-\nu_{a5}=0.017(\text{次/秒}),$$
$$\nu_{a5}-\nu_{a\infty}=0.00019(\text{次/秒}).$$

设对于各通过区的响应量，材料损坏的循环次数为 $N_i(i=0,1,2,3,4,5)$，则每次 $a_i\leqslant y(t)\leqslant a_{i+1}$ 造成的损伤为 $\frac{1}{N_i}$，每秒钟内造成的损伤为 $\frac{1}{N_i}(\nu_{a_i}-\nu_{a_{i+1}})$ 在时间 T（秒）内造成的损伤为 $\frac{T}{N_i}(\nu_{a_i}-\nu_{a_{i+1}})$。对各个 i 值，都可列出这样的算式。当这些损伤之和累积为 1，即

$$\sum_{i=0}^{5}\frac{T}{N_i}(\nu_{a_i}-\nu_{a_{i+1}})=1$$

时，材料将遭到破坏。于是寿命值为

$$T=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{5}\frac{1}{N_i}(\nu_{a_i}-\nu_{a_{i+1}})}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{19.67}{N_0}+\frac{23.56}{N_1}+\frac{6.21}{N_2}+\frac{0.55}{N_3}+\frac{0.017}{N_4}+\frac{0.00019}{N_5}\right)}(\text{秒}).$$

如果前面的 N_i 值已换算成具有 99% 置信度的循环次数，则材料在寿命时间 T 内，使用可靠度为 99%。

例题 7-6 例题图 1-8 所示系统中，已知力激励的谱密度为

$$S_{PP}(\omega)=\frac{S_0}{1+\omega^2/\omega_0^2},$$

力 $P[t]$是平稳、正态分布的随机过程。试求弹簧变形响应 $y[t]$ 的下列各概率特征：

(a) 以正斜率跨过水平线 $y=a$ 的平均频率；

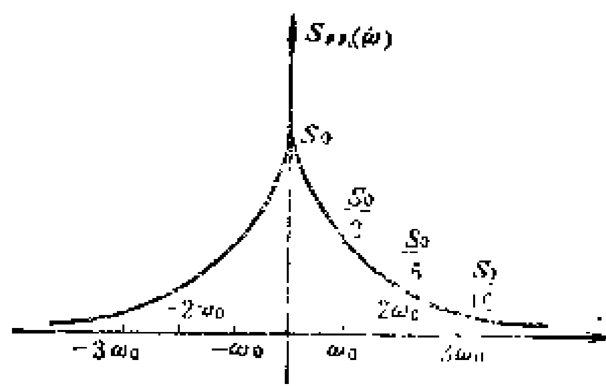
(b) 波峰分布的概率密度函数；

(c) $y(t)$ 出现极大值的平均频率；

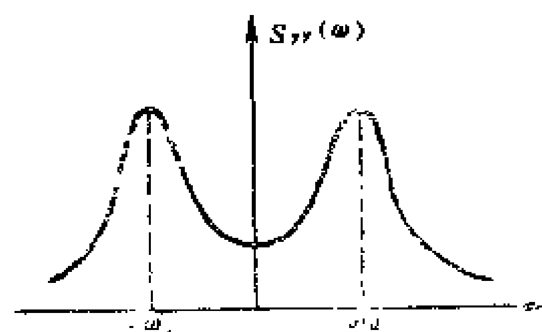
(d) 比较正跨越频率与极大值的频率，两者有何不同？

解：(1) 鉴别响应是否窄带的平稳正态分布随机过程

题意给定的激励谱是一个宽带谱(见例题图 7-6-1)，但对于本题的单自由度振动系统，其动态特性表示在 $H(\omega)$ 图上有一个尖峰，所以响应谱在共振频率附近取较大的值，而在远离共振



例题图 7-6-1



例题图 7-6-2

频率处所取的值要小得多。即响应谱曲线下的面积主要集中在共振区，可以看作一个窄带随机过程（见例题图 7-6-2）。又由于激励是平稳正态分布，所以线性系统的响应也一定是平稳正态分布的。

(2) 由例题 5-3 之(5)、(6)式，知频率响应函数

$$H_{Py}(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ic\omega}, \qquad (1)$$

$$H_{P\dot{y}}(\omega)=\frac{i\omega}{k-m\omega^2+ic\omega}. \qquad (2)$$

(a) 求响应以正斜率跨越 $y=a$ 的平均频率

应用公式(7-3) 计算

$$\nu_a^{+}=\frac{\sigma_{\dot{y}}}{2\pi\sigma_y}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}},\tag{3}$$

为此，先求 σ_y^2 和 $\sigma_{\dot{y}}^2$。由于 $s_{PP}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处没有脉冲函数故 $m_p=0$，由此得 $m_y=0$，于是

$$\begin{aligned}\sigma_y^2=E[y^2]&=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{Py}(\omega)|^2 s_{PP}(\omega)d\omega\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{-m\omega^2+ir\omega+k}\right|^2\frac{S_0}{1+\omega^2/\omega_0^2}d\omega\\&=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\omega_0}{(-m\omega^2+ir\omega+k)(\omega_0+i\omega)}\right|^2d\omega\\&=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\omega_0}{-i\omega^3m-\omega^2(m\omega_0+r)+i\omega(r\omega_0-k)+k\omega_0}\right|^2d\omega,\end{aligned}\tag{4}$$

查附录 8 的詹姆斯公式中 $n=3$ 的情况，令

$$\begin{cases}A_0=k\omega_0,\ A_1=r\omega_0+k,\ A_2=m\omega_0+r,\ A_3=m,\\B_0=\omega_0,\ B_1=B_2=0.\end{cases}\tag{5}$$

$$\therefore\qquad \sigma_y^2=S_0\frac{\pi A_3B_0^2}{A_0(A_1A_2-A_0A_3)}.\tag{6}$$

再计算 $\sigma_{\dot{y}}^2$ 值。因为 $m_y=0$，故 $m_{\dot{y}}=0$，于是

$$\sigma_{\dot{y}}^2=E[\dot{y}^2]=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{P\dot{y}}(\omega)|^2S_{PP}(\omega)d\omega$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{i\omega_0\omega}{-i\omega^3m-\omega^2(m\omega_0+r)+i\omega(r\omega_0+k)+k\omega_0}\right|^2d\omega.$$

仍应用詹姆斯公式，现在各 A 值同(5) 式，而

$$B_0'=0,\ B_1'=\omega_0,\ B_2'=0,\tag{7}$$

$$\therefore\qquad \sigma_{\dot{y}}^2=S_0\frac{\pi(B_1')^2}{(A_1A_2-A_0A_3)}\tag{8}$$

将(6)、(8) 两式代入(3) 式，得

$$\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S_0\pi(B_1')^2}{(A_1A_2-A_0A_3)}\cdot\frac{A_0(A_1A_2-A_0A_3)}{S_0\pi A_2B_0^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{a^2}{2}\,\frac{A_0(A_1A_2-A_0A_3)}{S_0\pi A_2B_0^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+r/\omega_0}}\exp\left\{-\frac{a^2kr(m\omega_0^2-r\omega_0-k)}{2\pi S_0(m\omega_0^2+r\omega_0)}\right\}. \qquad (9)$$

(b) 求波峰分布的概率密度函数

由(7-6)式和(6)式得

$$p_p(a)=\frac{\sigma}{\alpha_y^2}e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

$$=\frac{akr(m\omega_0^2+r\omega_0-k)}{\pi S_0(m\omega_0^2+r\omega_0)}\exp\left\{-\frac{a^2kr(m\omega_0^2+r\omega_0+k)}{2\pi S_0(m\omega_0^2+r\omega_0)}\right\}. \qquad (10)$$

(c) 求 $y(t)$ 出现极大值的平均频率

按(7-7)式计算

$$\mu_y=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}}, \qquad (11)$$

因此需先计算 $\sigma_{\ddot{y}}$，因为

$$H_{p\ddot{y}}(\omega)=\frac{-\omega^2}{-m\omega^2+ir\omega+k}, \qquad (12)$$

$$\therefore \qquad \sigma_{\ddot{y}}^2=E[\ddot{y}^2]=\int_{-\infty}^{\infty}|H_{p\ddot{y}}(\omega)|^2S_{pp}(\omega)d\omega$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{-\omega^2\omega_0}{-i\omega^3m-\omega^2(m\omega_0+r)+i\omega(r\omega_0+k)+k\omega_0}\right|^2d\omega.$$

现在詹姆斯公式中的各 A 值仍同(5)式，唯有

$$B_0''=0,\ B_1''=0,\ B_2''=\omega_0, \qquad (13)$$

$$\therefore \qquad \sigma_{\ddot{y}}^2=S_0\frac{\pi A_1(B_2'')^2}{A_3(A_1A_2-A_0A_3)}. \qquad (14)$$

将(8)式和(14)式代入(11)式，得

$$\mu_y=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S_0\pi A_1(B_2'')^2}{A_3(A_1A_2-A_0A_3)}\cdot\frac{(A_1A_2-A_0A_3)}{S_0\pi(B_1')^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{r\omega_0+k}{m}}. \tag{15}$$

(d) 求以正斜率跨过 $y=0$ 的平均频率

将 $a=0$ 代入(9) 式得

$$\nu_{a=0}^{+}=\nu_0^{+}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+r/\omega_0}}. \tag{16}$$

比较(15) 和(16) 式可知，当阻尼很小时，$r=0$，即响应的频带更加狭窄，就出现

$$\nu_0^{+}=\mu_y. \tag{17}$$

上式意味着 $y(t)$ 每穿越 $y=0$ 一次，就必有一个峰值.

若阻尼 $r\gg0$，即响应谱非小窄带，则 $\nu_0^{+}<\mu_y$ 这意味着 $y(t)$ 穿越 $y=0$ 一次，峰值可能多于一个，因为这时响应的波形中显然有混杂现象。

第七章习题

习题 7-1 已知应力 $\sigma[t]$ 为窄带平稳高斯随机过程，其谱密度为

$$S_{\sigma\sigma}(f)=\begin{cases} S_0 & (0\leqslant|f|\leqslant f_0), \\ 0 & (|f|>f_0). \end{cases}$$

若 $f_0=50$ 赫，试求应力超过$\sqrt{S_0f_0}$的 期望频率。

答案 $\nu_{a=\sqrt{S_0f_0}}^{+}=17.51$(次/秒).

习题 7-2 平稳随机过程 $y[t]$和 $\dot{y}[t]$的联合概率密度函数如下式所示

$$p(y,\ \dot{y})=\begin{cases}\frac{1}{4\,y_0\dot{y}_0}(\text{常量})(-y_0\leqslant y\leqslant y_0,\ -\dot{y}_0\leqslant\dot{y}\leqslant\dot{y}_0), \\ 0 \qquad\qquad (\text{其它}).\end{cases}$$

试计算它的统计平均频率 ν_a^{+} 和波峰的概率密度函数 $p_p(a)$。

答案: $\nu_a^{+}=\frac{\dot{y}_0}{8\,y_0}=\frac{\sigma_{\dot{y}}}{8\,\sigma_y}\qquad(0\leqslant a\leqslant y_0)$,

$$p_p(a)=\delta(a-y_0).$$

习题 7-3 已知各态历经高斯窄带随机过程 $x[t]$ 的平均值为零，均方值为 σ_x^2。试确定：

(a) $x(t)$越出水平线 $x=\pm\sigma_x$ 以外所占的时间比例；

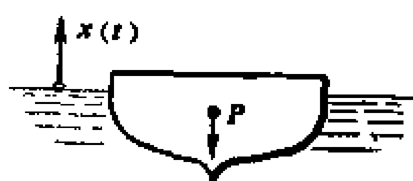
(b) 随机地在 $x(t)$中选取一个波峰，其峰值大于 σ_x 的概率；

(c) 所有峰值的平均值；

(d) 全部峰值中，只有百分之一的峰值能够超过的那个值。

答案：32%、61%，$1.25\sigma_x$，$3.03\sigma_x$。

习题 7-4 某随机振动系统其寿命 T 的分布函数为 $P(t)$。已知它无故障地工作了 t_1 时间，试计算它在 t_1 以后发生故障时的平均寿命。



例题图 7-6

答案：

$$E[T|T>t_1]=\frac{\int_{t_1}^{\infty} t p(t)dt}{\int_{t_1}^{\infty} p(t)dt}.$$

习题 7-5 已知响应过程 $y(t)$是正态分布的，其谱密度为

$$S_{yy}(f)=\begin{cases} S_0 & (100\text{ 赫}\leqslant|f|\leqslant 200\text{ 赫}), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

试问可否作为小窄带处理？

答案：计算得 $u_y=163$ 赫，$\nu_0^+=153$ 赫，即极大值频率比跨过 $y=0$ 的频率高 7%，说明响应波有混杂现象，不能作为小窄带处理。

习题 7-6 习题图 7-6 所示轮船重量为 P，水平截面积为 A(与截面高度无关)，海水密度为 ν。若船铅垂振动时的阻力与速度成正比，比例系数为 c。又船以某速度航行时，受海浪铅垂位移激励谱为 $S_{xx}(\omega)=9e^{-(\omega-4)^2}$ 厘米²·秒/弧度，求船体上下相对振动位移 $y=z-x$ 超过 $a=2$ 厘米及 4 厘米的期望频率。假定响应 $y(t)$可看作窄带正态随机过程。

答案：

$$\nu_a^+=\frac{\sigma_{\dot y}}{2\pi\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2},$$

式中，$a=2$ 厘米，4 厘米，

$$\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{-\omega^2}{\omega^2+\frac{\nu g}{P}i\omega+\frac{\nu gA}{P}}\right|^2\cdot 9e^{-(\omega-4)^2}d\omega \quad (\text{厘米}^2).$$

$$\sigma_{\dot y}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{-i\omega^3}{-\omega^2+\frac{\nu g}{P}i\omega+\frac{\nu gA}{P}}\right|^2\cdot 9e^{-(\omega-4)^2}d\omega \quad (\text{厘米}^2).$$

习题 7-7 若系统的响应为平稳随机过程，且响应首次超越 a 值时，

系统即遭损坏。试证系统寿命 T 的概率密度函数为：

$$f_a(T)=\nu_a e^{-\nu_a T} \qquad (T\geqslant 0),$$

式中 ν_a 为响应超越 a 值的期望频率。

参 考 文 献

[1] D.E.纽兰，随机振动与谱分析概论，机械工业出版社，1981。

[2] 徐灏，疲劳设计，机械工业出版社，1982。

[3] 凌树森，可靠性理论及其在机械工程中的应用，江苏机械，1981，第5期。

[4] 吕秀中、葛森，随机疲劳期望寿命的一个估算公式，浙江大学学报 1983，第4期。

第八章　非线性随机振动

严格地说，工程上的许多实际问题，都是非线性的，例如：减振弹簧在变形量不大时是线性的，而变形超过一定范围则是非线性的；金属电缆的载荷-应变关系在突然折断之前也是非线性的；地震时结构物存在着发生大变形的可能性，所以系统进入非线性的概率不为零。对于实际系统，仅当非线性程度非常弱或进入非线性的概率非常小甚至为零时，才近似地看作线性系统。因此，对于非线性问题，有必要认真地加以研究。

非线性系统受随机激励时的响应问题，简称为非线性随机振动问题。它与线性系统随机振动的区别主要是：

（1）叠加原理不再适用，即各个输入引起的输出之和不等于输入之和引起的输出。

（2）因此，以叠加原理为基础的杜哈曼积分也不再适用，而由杜哈曼积分导出的相关理论也随之失效了，从而不存在也不可能得到激励谱、响应谱、系统的动态特性三者在频率域中的函数关系。

（3）因为正态过程的线性叠加才能得到正态过程，现在既然不能应用叠加原理，因此对于一般的非线性系统，正态激励得到的是非正态响应。

（4）在无噪声干扰的情况下，单输入单输出非线性系统的常凝聚函数

$$\gamma_{xy}^2(\omega)=\frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}\neq 1, \tag{8-1}$$

在多输入多输出的非线性系统中，则偏凝聚函数

$$\gamma^2_{\Delta x_i \Delta y_i}(\omega)=\frac{|S_{\Delta x_i \Delta y_i}(\omega)|^2}{S_{\Delta x_i \Delta x_i}(\omega)S_{\Delta y_i \Delta y_i}(\omega)}\neq 1, \tag{8-2}$$

非线性系统的某些特性在某些场合的特殊用途能体现出优点。例如：硬特性弹簧的非线性系统受白噪声激励时的响应均方值要比不计非线性项时来得小，也即具有这类特性的减震器，减震效果优于对应的线性减震器；软特性弹簧的非线性控制系统，受白噪声激励时的响应均方值要比不计非线性项时来得大，也即具有这类特性的放大系统在满足稳定性的条件下将显得特别灵敏；此外，非线性随机振动的理论，还可应用于振动的监察，若一个系统，突然出现非线性特征，则往往预示将发生故障或损坏，因而用偏凝聚函数监控对输出起主要作用的传递通道，或者人们最感兴趣的通道，就能实时显示系统的运行情况，防患于未然。

一、内容提要

由于非线性随机振动问题的难度要比线性的大得多，故这方面的理论研究工作进展缓慢。一些问题只有在特殊情况下才能求解，大量实际问题只能得到近似解。其数学处理方法主要有以下三种：

1. FPK 法(Fokker-Planck-Kolmogorov 方程)

此法适用于特殊性质的随机过程——马尔柯夫过程。由于在均方意义下白噪声的积分没有存在意义，只有当振动的微分方程写成伊藤(Itô)型时，其响应随机过程才具有良好的马尔柯夫性质。而响应是马尔柯夫随机过程时，响应就完全由它的初始条件 X_0 和转移概率密度函数(又称传递概率密度函数) $P(X,t|X_0,t_0)$ 所决定，这里 X 代表具有分量 x_i 的向量 $(i=1,2,\cdots,n, n$ 为向量的维数)。转移概率密度函数由如下的福克-弗朗克（Fokker-Planck）方程求得：

$$\frac{\partial}{\partial t}p(X,t|X_0,t_0)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(X,t)p]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[b_{ij}(X,t)p]=0. \qquad (8\text{-}3)$$

对于二维随机过程的特殊情况，(8-3)式为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(a_1 p)}{\partial x_1}+\frac{\partial(a_2 p)}{\partial x_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{11}p)}{\partial x_1^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{22}p)}{\partial x_2^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{12}p)}{\partial x_1 \partial x_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{21}p)}{\partial x_1 \partial x_2}=0. \qquad (8\text{-}4)$$

(8-3)式中"系数"

$$a_i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[z_i-x_i]. \qquad (8\text{-}5)$$

表示随机函数变化的速度，

$$b_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[(z_i-x_i)(z_j-x_j)]. \qquad (8\text{-}6)$$

表示随机函数协方差的变化速度。这里 z_i 是 x_i 在时刻 $t+\Delta t$ 的值。

用(8-5)、(8-6)式求"系数"，需要知道系统本身的各个物理参数和激励的概率特征。知道了 a_i 和 b_{ij} 时，用(8-4)式求解 $p(X,t|X_0,t_0)$ 还需要知道响应的初始条件、边界条件和概率条件。当响应的条件概率密度函数 p 确定后，则响应的幅域和时域各个信息也完全可求了。

2. 统计线性化方法

它是求解非线性规则振动时等价线性化法的推广，其基本思想是以下式右端的线性函数来等价地代替左端的非线性随机函数：

$$F(x,\dot{x})\approx a_1+a_2x_0+a_3\dot{x}_0,$$

式中的各系数 $a_i(i=1,2,3)$ 由误差项的方差为最小的条件确定。

此法可求解具有下列特点的非线性随机振动问题：

(1) 系统的非线性项与速度和位移均有关。

(2) 具有回线特性的非线性问题(例如材料的内摩擦阻尼)。

(3) 激励可以是非白噪声，但必需是平稳正态随机过程。

3. 摄动法(小参数法)

它也是求解非线性规则振动时摄动法的推广。即当系统具有弱非线性时，认为其解接近于对应的线性解，而可展开为 ε 的幂级数。由系统运动微分方程中 ε 的同次幂系数相等的条件，通过解一系列线性微分方程，确定幂级数中各项的系数，于是就得到了非线性方程的近似解。从理论上说，幂级数所取的项数越多，解的精度就越高。但实际上，超过一阶近似后，求解已很困难。即使系统受到的是正态随机激励，其响应的一阶近似值也不是正态过程。所以用摄动法求解实际问题时，一般只做到一阶近似。

摄动法适用于各种形式的非线性方程，如包含非线性恢复力或非线性阻尼力或两者兼有的方程。而且当激励不是单输入时，它并不要求各个输入是互不相关的。

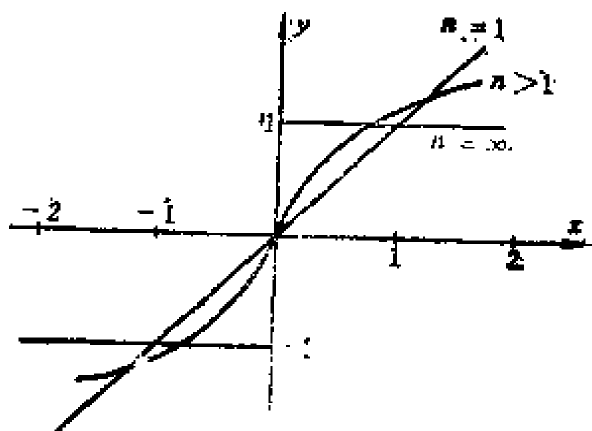
以上三种方法中，后两者只适于求解弱非线性问题，而前者并不要求系统一定是弱非线性的，即也可求解非弱非线性随机振动问题

二、例　　题

例题 8-1　随机激励 $X(t)$ 输入到一非线性系统，则响应 $Y(t)$ 也是一随机过程。若非线性系统的传递特性为：

$$Y=\begin{cases}X^{\frac{1}{n}} & (X\geqslant 0),\\ -|X|^{\frac{1}{n}} & (X<0).\end{cases}$$

其中 n 为正整数。传递特性曲线见例题图 8-1-1。



例题图 8-1-1

(a) 若 X 的概率密度函数处处存在，试确定 Y 的概率密度函

数的一般表达式。

(b) 若X服从标准正态分布(均值为零，标准离差为1)，即

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

试确定Y的概率密度函数。

解：(a) 先计算响应Y的概率分布函数。

当$y>0$时，

$$\begin{aligned}P_Y(y)&=\text{Prob}[Y\leqslant y]=\text{Prob}[X^{\frac{1}{n}}\leqslant y]\\&=\text{Prob}[X\leqslant y^n]=P_X(y^n),\end{aligned}\tag{1}$$

当$y<0$时，

$$\begin{aligned}P_Y(y)&=\text{Prob}[Y\leqslant y]=\text{Prob}[-|X|^{\frac{1}{n}}\leqslant y]\\&=\text{Prob}[X\leqslant -|y|^n]=P_X(-|y|^n),\end{aligned}\tag{2}$$

所以

$$P_Y(y)=\begin{cases}P_X(y^n) & (y>0),\\ P_X(-|y|^n) & (y>0).\end{cases}\tag{3}$$

再计算响应Y的概率密度函数。

当$y>0$时，

$$\begin{aligned}p_Y(y)&=\frac{dP_Y(y)}{dy}=\frac{dP_X(y^n)}{dy}=\frac{dP_X(y^n)}{dy^n}\cdot\frac{dy^n}{dy}\\&=p_X(y^n)\cdot ny^{n-1}.\end{aligned}\tag{4}$$

当$y<0$时，

$$\begin{aligned}p_Y(y)&=\frac{dP_Y(y)}{dy}=\frac{dP_X(-|y|^n)}{dy}=\\&=\frac{dP_Y(-|y|^n)}{d(-|y|^n)}\cdot\frac{d(-|y|^n)}{dy}\\&=p_X(-|y|^n)(-1)n|y|^{n-1}(-1)\\&=p_X(-|y|^n)\cdot n|y|^{n-1}.\end{aligned}\tag{5}$$

(b) 若$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，则应用上述结果得：

当 $y>0$ 时，

$$p_Y(y)=p_X(y^n)ny^{n-1}=\frac{ny^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(y^n)^2/2}$$

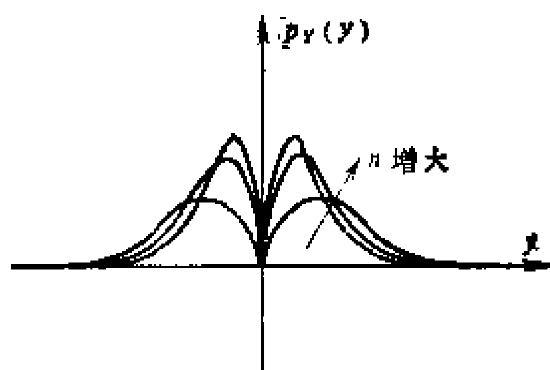
$$=\frac{ny^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^{2n}/2}。\tag{6}$$

当 $y<0$ 时，

$$p_Y(y)=p_X(-|y|^n)\cdot n|y|^{n-1}$$

$$=\frac{n|y|^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(-|y|^n)^2/2}$$

$$=\frac{n|y|^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-|y|^{2n}/2}。\tag{7}$$



例题图 8-1-2

合併(6)、(7)两式，得

$$p_Y(y)=\frac{n|y|^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-|y|^{2n}/2},\tag{8}$$

$p_Y(y)$曲线见图 8-1-2。

讨论：(1) 由(8)式及图 8-1-2 可见，$Y(t)$ 不服从正态分布。这说明非线性系统受正态激励后，其响应一定不是正态分布。

(2) 本题的 $p_Y(y)$ 也可直接应用例题 2-3 方法 1 中所述的定理求得。

$$g(y)=\begin{cases} y^n & (y\geq 0), \\ -|y|^n & (y<0). \end{cases}$$

所以当 $y\geq 0$ 时，

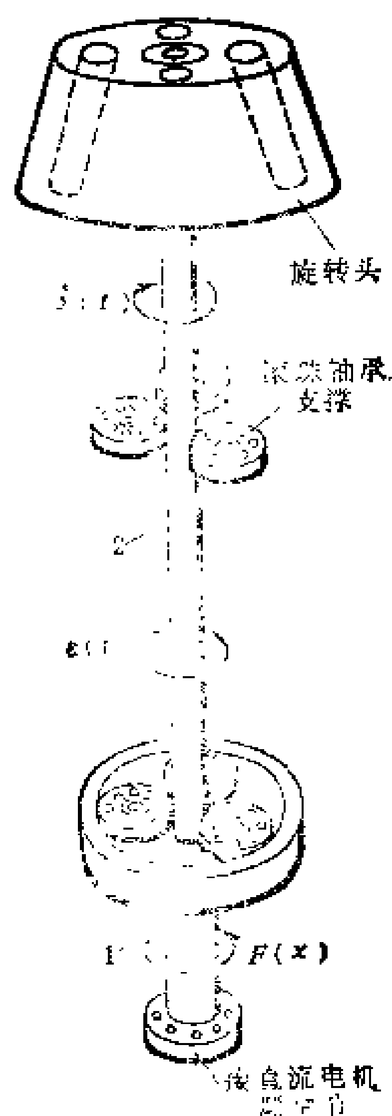
$$p_Y(y)=p_X(y^n)|(y^n)'|=p_X(y^n)ny^{n-1},$$

当 $y<0$ 时，

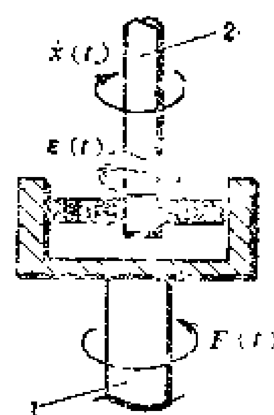
$$p_Y(y)=p_X(-|y|^n)|(-|y|^n)'|=p_X(-|y|^n)n|y|^{n-1}.$$

例题 8-2 图 8-2-1 为高速离心机的结构简图。轴 1 由直流电机驱动，轴1上端的圆盘内装有三个滚珠轴承，滚珠轴承同时与圆盘内壁和轴 2 之外圆接触（见图8-2-2），靠摩擦力带动轴 2 高速转动。这种传动机构的优点是：结构紧凑，传递速比高。

设轴 2 的旋转角速度为 x，直流电机驱动力矩为 $M(x)$，是 x 的函数；摩擦阻力矩为 $\varepsilon(t)$，是时间的随机函数，其均值



例题图 8-2-1



例题图 8-2-2

为 m_ε，自相关函数为 $\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$，且过程是平稳的。则轴 2 的运动规律为：

$$J\dot{X} = M(x) - \varepsilon(t),$$

式中，J 为轴 2 连同旋转头绕铅垂轴的转动惯量。或

$$\dot{x} = M_1(x) - \varepsilon_1(t), \tag{1}$$

式中 $M_1 = M/J$，$\varepsilon_1 = \varepsilon/J$。

试建立条件概率密度函数 $p(x,t|x_0,t_0)$ 的福克-弗朗克方程。

解：(1) 先求方程的"系数"a_1。将系统的一阶运动方程(1)式的两边在 t 到 $t+\Delta t$ 的积分限内积分，得

$$x(t+\Delta t)-x(t)=z-x=\int_t^{t+\Delta t}M_1(x)\,dt_1+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon_1(t_1)dt_1, \tag{2}$$

再应用积分中值定理得

$$Z-x=M_1(x)\Delta t+\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon_1(t_1)dt_1, \tag{3}$$

对(3)式两边取条件数学期望，其中左边

$$E[Z-x]=\int_{-\infty}^{\infty}(Z-x)p(z,t+\Delta t|x,t)dz, \tag{4}$$

右边为

$$E[M_1(x)\Delta t]+E\left[\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon_1(t_1)dt_1\right], \tag{5}$$

由于 $M_1(x)$ 是确定性的函数，故

$$E[z-x]=M_1(x)\Delta t+\int_t^{t+\Delta t}m\varepsilon_1(t_1)dt_1$$

$$=M_1(x)\Delta t+m_{\varepsilon_1}\Delta t. \tag{6}$$

上式中，考虑到对于平稳随机过程，均值不是时间的函数，即 $m_{\varepsilon_1}(t_1)=m_{\varepsilon_1}(t_2)=\cdots\cdots=m_{\varepsilon_1}$，将(6)式左边除以 Δt 并取极限，得(8-5)式的随机函数的变化速度

$$a_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[Z-x]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(Z-x)p(Z,t+\Delta t|x,t)dz\right]. \tag{7}$$

(6) 式右边也除以 Δt 并取极限，得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M_1(x)\Delta t+m_{\varepsilon_1}\Delta t}{\Delta t}=M_1(x)+m_{\varepsilon_1},$$

于是

$$a_1=M_1(x)+m_{\varepsilon_1}. \tag{8}$$

(2) 为了求福克-弗朗克方程的另一个“系数” b_1，应用公式(8-6)：

$$b_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[(z-x)^2], \tag{9}$$

式中，$E[(z-x)^2]$是偏差$(z-x)$平方的条件数学期望，它由下式定义：

$$E[(z-x)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(z-x)^2p(z,t+\Delta t|x,t)dz, \tag{10}$$

从(3)式得

$$(Z-x)^2=[M_1(x)\Delta t+\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon_1(t_1)dt]^2, \tag{11}$$

对上式两边取集合平均

$$E[(z-x)^2]=E[\{M_1(x)\Delta t+\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon_1(t_1)dt_1\}^2]$$

$$=M_1^2(x)\Delta t^2+2M_1(x)\Delta t\int_t^{t+\Delta t}m_{\varepsilon_1}(t_1)dt_1+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}E[\varepsilon_1(t_1)\varepsilon_1(t_2)]dt_1dt_2$$

$$=M_1^2(x)\Delta t^2+2M_1(x)m_{\varepsilon_1}\Delta t^2+\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_1,t_2)dt_1dt_2 \tag{12}$$

式中 $\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_1, t_2)$为$\varepsilon_1$的自相关函数。于是

$$b_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[M_1^2(x)\Delta t^2+2M_1(x)m_{\varepsilon_1}\Delta t^2+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_1,t_2)dt_1dt_2]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\iint_t^{t+\Delta t}\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_1,t_2)dt_1dt_2\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\iint_t^{t+\Delta t}\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_2-t_1)dt_1dt_2\right]. \tag{13}$$

上式中，考虑到对于平稳随机过程，有

$$\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_1,t_2)=\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\tau)=\phi_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(t_2-t_1). \tag{14}$$

(3) 把以上算得的福克-弗朗克方程的"系数"a_1和b_1代入(8-3)式，得

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(pa_1)}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(pb_1)}{\partial x^2}=0, \tag{15}$$

式中，$p=p(x, t|x_0,t_0)$，a_1,b_1分别如(8)式和(13)式所示

讨论：(1) 由(8)及(13)式可知，a_1,b_1不仅与激励$M(x)$，$\varepsilon(t)$有关，而且与系统传递的动态关系式(1)有关。

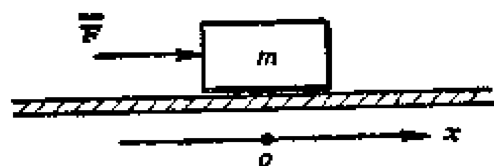
(2) 响应x的条件概率密度函数从(15)式求得后，即可知响应的时域和幅域的各种信息。

例题 8-3 质量 m=1 公斤的物块放在不计摩擦的光滑水平面上，受到随机力F的作用而滑动，如图 8-3-1 所示。已知力$F(t)$为平稳随机过程，其概率特征为$m_F=0$，$\phi_{FF}(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau)$，$S_0=0.1$ 公斤^{2}米^2/秒^3。在初始时刻，质量静止。取x轴为水平。试求：

(a) 响应在非平稳阶段的任意瞬时，物块的速度为$\dot{x}$的条件概率密度函数$p(\dot{x},t/\dot{x}_0,t_0)$；

(b) 在$t=1$秒时，物块的速度$\dot{x}$满足

-2 米/秒$\leqslant\dot{x}\leqslant 2$ 米/秒的概率；



例题图 8-3-1

(c) 在$t=1$秒时，物块速度响应$\dot{x}$的均值$E[\dot{x}]$和均方值$E[\dot{x}^2]$。

解：(a) 先确定福克-弗朗克方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(pa_1)}{\partial \dot{x}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(pb_1)}{\partial \dot{x}^2}=0 \tag{1}$$

的"系数"a_1和b_1。为此，从物块的运动微分方程

$$\ddot{x}=\frac{F}{m} \tag{2}$$

着手。应用上题的(8)和(13)式，得

$$a_1=m_F=0, \tag{3}$$

$$b_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\iint_t^{t+\Delta t} 2\pi S_0 \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2\right] \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{1}{m^2} 2\pi S_0 \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt_1\right] = \frac{2\pi S_0}{m^2}, \tag{4}$$

将 a_1, b_1 值代入(1)式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\pi S_0}{m^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^2}. \tag{5}$$

用分离变量法求解上述方程，令

$$p(\dot{x}, t) = X(\dot{x})T(t),$$

代入(5)式得

$$X(\dot{x})T'(t) = \frac{\pi S_0}{m^2} X''(\dot{x})T(t),$$

即

$$\frac{m^2}{\pi S_0} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(\dot{x})}{X(\dot{x})}, \tag{6}$$

(6)式左边为 t 的函数，右边为$\dot{x}$的函数，一般两者不可能相等，唯一的例外是两边实际上为常数，即

$$\frac{m^2}{\pi S_0} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(\dot{x})}{X(\dot{x})} = \text{常数}. \tag{7}$$

随机变量 $\dot{x}$ 的变化区间为无穷大， 但同时$\dot{x}$达到无穷大的概率又是微乎其微的，可以认为，$p(\dot{x}, t \mid \dot{x}_0, t_0)|_{\dot{x}=\pm\infty} = 0$。 为满足此条件，(7)式中的常数必须为负值，记作 $-\lambda^2$，于是

$$\frac{m^2}{\pi S_0} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(\dot{x})}{X(\dot{x})} = -\lambda^2, \tag{8}$$

由(8)式得

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda^2 \dfrac{\pi S_0}{m^2} T(t) = 0, \\ X''(\dot{x}) + \lambda^2 X(\dot{x}) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

它们的解分别是

$$\begin{cases} T(t)=C_1'\exp\left(-\lambda^2\frac{\pi S_0}{m^2}t\right), \\ X(\dot{x})=C_2'\cos\lambda\dot{x}+C_3'\sin\lambda\dot{x}. \end{cases} \tag{10}$$

式中，C_1'，C_2'，C_3'是待定的积分常数。于是

$$\begin{aligned} p(\dot{x},t|\dot{x}_0,t_0) &= X(\dot{x})T(t) \\ &= \exp\left(-\lambda^2\frac{\pi S_0}{m^2}t\right)(c_2\cos\lambda\dot{x}+c_3\sin\lambda\dot{x}). \end{aligned} \tag{12}$$

式中已将积分常数合併成两个。

题意给定的初始条件是

$$p(\dot{x},t|\dot{x}_0,t_0)|_{t=t_0=0}=\delta(\dot{x}). \tag{13}$$

欲使(12)式满足(13)式的初始条件，一般是不可能的。但既然(12)式是方程的解，那么

$$\sum_{(\lambda)}\exp\left(-\lambda^2\frac{\pi S_0}{m^2}t\right)(c_2\cos\lambda\dot{x}+c_3\sin\lambda\dot{x}), \tag{14}$$

也必定是方程的解，由于实际上λ可取任何值，故上述求和记号可用$-\infty$到$+\infty$的积分来表示：

$$\begin{aligned} p(\dot{x},t|\dot{x}_0,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\lambda^2\frac{\pi S_0}{m^2}t\right)(c_2\cos\lambda\dot{x} \\ + c_3\sin\lambda\dot{x})d\lambda. \end{aligned} \tag{15}$$

按(13)式，应有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(c_2\cos\lambda\dot{x}+c_3\sin\lambda\dot{x})d\lambda=\delta(\dot{x}), \tag{16}$$

应用付里叶公式：

$$\begin{aligned} \delta(\dot{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\cos\lambda(\xi-\dot{x})d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda\dot{x}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \sin\lambda\dot{x}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda, \end{aligned}$$

上式与(16)式左边相比较，可以看出

$$c_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{1}{2\pi},$$

$$c_3=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=0,$$

所以

$$p(\dot{x},t|\dot{x}_0,t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\lambda^2\frac{\pi S_0}{m^2}t\right)\cos\lambda\dot{x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\lambda^2\frac{\pi S_0}{m^2}t\right)\cos\lambda\dot{x}d\lambda. \tag{17}$$

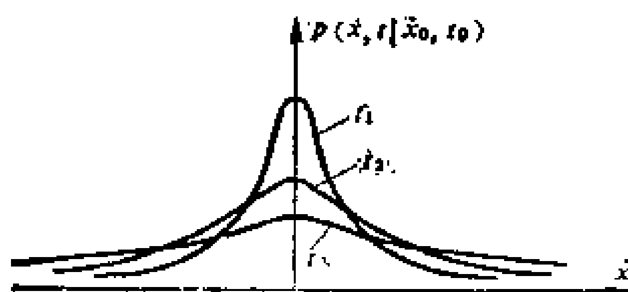
上面应用了被积函数是 λ 的偶函数的性质。查积分表知

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\beta^2/4a^2},$$

故(17)式的积分结果为

$$p(\dot{x},t|\dot{x}_0,t_0)=\frac{m}{2\pi\sqrt{S_0t}}\exp\left(\frac{-m^2\dot{x}^2}{4\pi S_0t}\right). \tag{18}$$

这就是最终得到的方程(1)的解。上式表示随时间变化的正态分布，标准离差为$\frac{\sqrt{2\pi S_0t}}{m}$，$\dot{x}$ 的均值为零。随着时间 t 的增加，$\dot{x}$ 偏离其均值（也就是初始值）的概率越来越大，不同时刻($t_3>t_2>t$)的条件概率密度曲线如图 8-3-2 所示。



例题图 8-3-2

(b) 在$t=1$ 秒时，-2 米/秒$\leqslant\dot{x}\leqslant 2$ 米/秒的概率为

$$\mathrm{Prob}(-2\leqslant\dot{x}\leqslant 2)=\Phi\left(\frac{2-m_{\dot{x}}}{\sigma_{\dot{x}}}\right)-\Phi\left(-\frac{2-m_{\dot{x}}}{\sigma_{\dot{x}}}\right),$$

式中，$m_{\dot{x}}=0$，　$\sigma_{\dot{x}}=\frac{\sqrt{2\pi S_0t}}{m}\Big|_{t=1}=0.79266$(米/秒)。

$\therefore\quad \text{Prob}(-2\leqslant\dot{x}\leqslant 2)=\Phi(2.5231)-\Phi(-2.5231)$

$=0.9941-0.0059=0.9882.$

(c) $t=1$ 秒时的均值和均方值

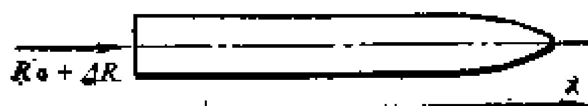
由(18)式知，在任何时刻有

$$E[\dot{x}]=m_{\dot{x}}=0,$$

$$\therefore\quad E[\dot{x}^2]=\sigma\dot{x}^2=\frac{2\pi S_0 t}{m^2}.$$

$$\therefore\quad E[\dot{x}^2]|_{t=1}=\frac{2\times 3.14\times 0.1\times 1}{1^2}=0.6283(\text{米}^2/\text{秒}^2).$$

讨论：本题中激励虽然是平稳的，但速度响应的非平稳阶段，其概率密度函数和均方值都随时间而变。



例题图 8-4-1

例题 8-4 例题图8-4-1所示质量为m的鱼雷，在力$R_0+\Delta R$作用下作水平直线运动，其中R_0为推力中的不变分量，ΔR为随机分量。鱼雷的水平直线运动方程为：

$$m\dot{v}+F(v)=R_0+\Delta R,\tag{1}$$

其中v是鱼雷的运动速度；$F(v)$是与v有关的液体阻力。

随机函数ΔR是白噪声型正态随机过程，其数学期望为零，自相关函数为$\phi_{\Delta R\Delta R}(\tau)=\sigma_{\Delta R}^2\delta(\tau)$。求速度的随机变化部分$v_1$的平稳的概率密度函数$p(v_1)$和方差。

解：设$v=v_0+v_1$，其中v_1是由ΔR作用引起的速度的随机离散值，将$F(v)$在$v=v_0$附近展开为级数，并假设阻力ΔF是速度v_1的奇函数，得

$$F(v)=F(v_0)+\frac{\partial F}{\partial v}\bigg|_{v=v_0}v_1+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial v^3}\bigg|_{v=v_0}v_1^3+\cdots,\tag{2}$$

因为

$$m\dot{v}_0+F(v_0)=R_0,$$

最后得到对于 v_1 的下列方程：

$$\dot{v}_1+F_1(v_1)=\varepsilon(t), \tag{3}$$

其中

$$F_1(v_1)=\frac{1}{m}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\bigg|_{v=v_0}v_1+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial v^3}\bigg|_{v=v_0}v_1^3+\cdots\right),$$

$$\varepsilon(t)=\frac{\Delta R}{m},$$

为求福克-弗朗克方程的"系数"a_1 和 b_1，在区间 t 到 $t+\Delta t$ 内对运动方程(3)式进行积分，得

$$\Delta v_1=-F_1(v_1)\Delta t+\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon(t_1)dt_1,$$

故"系数"

$$a_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[\Delta v_1]=-F_1(v_1),$$

$$b_1=\lim_{\Delta t\to 0}E[\Delta v_1(t_1)\Delta v_1(t_2)]=\sigma_\varepsilon^2=\frac{\sigma_{\Delta P}^2}{m^2}.$$

本题的福克-弗朗克方程为$\left(已考虑了平稳条件\frac{\partial p}{\partial t}=0\right)$：

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial v_1^2}+\frac{d}{dv_1}[F_1(v_1)p]=0, \tag{4}$$

或

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}\frac{dp}{dv_1}+F_1(v_1)p=c. \tag{5}$$

可以认为，出现大的 v_1 值的概率是小的，因此概率密度函数应当满足条件 $p(v_1)|_{v_1\to\infty}=0$；如果假设当 $|v_1|\to\infty$ 时，导数 p'_{v_1} 也等于零，那么从方程(5)可得 $c=0$。这两个假设正确与否，要由在这样的假设下所得的解来检验。如果解确能满足假设，则可以认为这些假设是正确的。反之，则应对假设加以修正。这里要强调指出：仅仅在时不变的机械系统中，平稳过程才是可能的。当 $c=0$ 时，方程(5)的解为

$$p=c_1\exp\left\{-\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}\int_0^{v_1}F_1(v_1)dv_1\right\}, \tag{6}$$

任意常数 c 可由下面的概率条件求出：

$$\int_{-\infty}^{\infty}p\,dv_1=1. \tag{7}$$

如果 $F_1(v_1)$中只取两项，即 $F_1(v_1)$是下式表示的非线性函数：

$$F_1(v_1)=\alpha_1v_1-\alpha_2v_1^3, \tag{8}$$

则有解

$$p=c_1\exp\left\{-\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}\left(\alpha_1\frac{v_1^2}{2}-\alpha_2\frac{v_1^4}{4}\right)\right\}. \tag{9}$$

显然，这个概率密度函数不是正态的。

由(9)式可见，当$|v_1|\to\infty$时，p 与$\dfrac{dp}{dv_1}$ 都趋于零，所以前面的假设是正确的。另外，显见数学期望 $E[v_1]=0$，所以 v_1 的方差即均方值，可按下式计算：

$$\sigma_{v_1}^2=c_1\int_{-\infty}^{\infty}v_1^2\exp\left\{-\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}\left(\frac{\alpha_1}{2}v_1^2+\frac{\alpha_2}{4}v_1^4\right)\right\}dv_1. \tag{10}$$

为了求积分常数 c_1 的近似值，将下式左边展成级数并只取前两项

$$\exp\left\{-\frac{2\alpha_2}{4\sigma_\varepsilon^2}v_1^4\right\}\doteq1-\frac{\alpha_2}{2\sigma_\varepsilon^2}v_1^4, \tag{11}$$

上式代入(9)和(7)式，得

$$c_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\alpha_1}{\sigma_\varepsilon^2}v_1^2\right]dv_1-\frac{\alpha_2}{2\sigma_\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}v_1^4\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\frac{\alpha_1}{\sigma_\varepsilon^2}v_1^2\right]dv_1\right\}\doteq1,$$

积分以后得(参见例题 8-6 的(12)式)

$$c_1\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\alpha_1}}-\frac{\alpha_2}{2\sigma_\varepsilon^2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}\,\sigma_\varepsilon^5}{4\alpha_1^{5/2}}\right\}\doteq1,$$

因此

$$c_1 \doteq \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sigma_e\sqrt{\pi}\left(1-\frac{3}{8}\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\sigma_e^2\right)}. \tag{12}$$

(10) 式也作同样的处理

$$\sigma_{v1}^2 \doteq c_1\int_{-\infty}^{\infty} v_1^2 \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\sigma_e^2}v_1^2\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{2\sigma_e^2}v_1^4\right)dv_1,$$

积分后得

$$\sigma_{v1}^2 \doteq \frac{c_1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\sigma_e^3}{(\sqrt{\alpha_1})^3}\left(1-\frac{15}{8}\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\sigma_e^2\right),$$

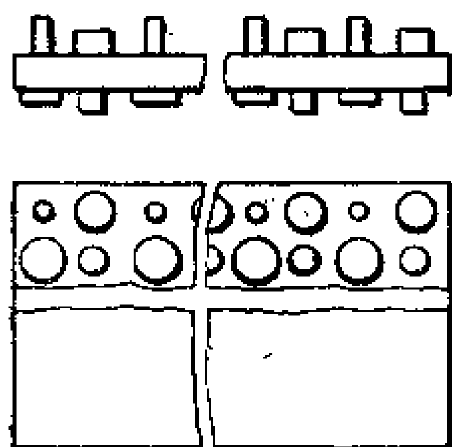
把 (12) 式的 c_1 值代入上式，最后得

$$\sigma_{v1}^2 \doteq \frac{\sigma_e^2\left(1-\frac{15}{8}\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\sigma_e^2\right)}{2\alpha_1\left(1-\frac{3}{8}\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\sigma_e^2\right)}. \tag{13}$$

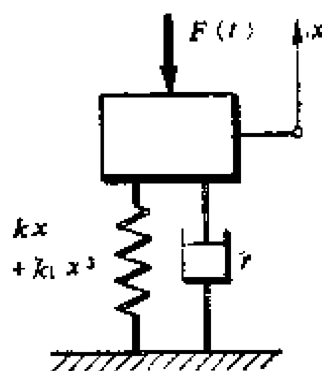
讨论：当阻力与 v_1 成线性关系，即 $F_1=\alpha_1 v_1$ 时将给出正态分布的概率密度函数为

$$p=c_1\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\sigma_e^2}v_1^2\right),$$

易于确定式中的 $c_1=\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\pi}\sigma_e}$，继而求得 $\sigma_{v_1}^2=\frac{\sigma_e^2}{2\alpha_1}$。方差也可由



例题图 8-5-1



例题图 8-5-2

(13) 式计算，在 $\alpha_2=0$ 的情况下，(13) 式给出的是精确值。

例题 8-5 例题图 8-5-1 所示的万用橡胶减振垫可作为减振器安装在机器或仪器上，机器与减振垫组成弹簧-质量-阻尼系统。设机器的质量为 m，等效粘滞阻尼系数为常数 r，由橡胶减振垫提供的弹簧刚度为非线性的，恢复力为 $kx+k_1x^3$。系统受到平稳随机力 $F(t)$ 的激励，已知 $F(t)$ 是均值为零的正态分布的白噪声，其自相关函数为 $\phi_{FF}(\tau)=2\pi s_0\delta(\tau)$。求系统垂直位移响应 x 的均方值。

解：建立系统的简化模型，见例题图 8-5-2。系统的运动微分方程为：

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx+k_1x^3=F(t), \tag{1}$$

令

$$n=\frac{r}{2m},\quad \omega_0^2=\frac{k}{m},\quad \mu=\frac{k_1}{m}, \tag{2}$$

(1) 式可化为

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega_0^2x+\mu x^3=\frac{1}{m}F(t). \tag{3}$$

由于均方意义下白噪声的积分没有存在意义，所以要用伊藤方程。对 (3) 式作变量置换，把一个二阶微分方程化为等价的一阶微分方程组，即令

$$\begin{cases}\dot{x}=y_1,\\ x=y_2.\end{cases} \tag{4}$$

把 (3) 式变为

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-2ny_1-\omega_0^2y_2-\mu y_2^3+\dfrac{F(t)}{m},\\ \dot{y}_2=y_1,\end{cases} \tag{5}$$

或

$$\begin{Bmatrix}dy_1(t)\\ dy_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2ny_1-\omega_0^2y_2-\mu y_2^3\\ y_1\end{bmatrix}dt+\begin{Bmatrix}dB(t)\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{6}$$

式中，$dB(t)$ 称为维纳过程。$B(t)$ 和 $f(t)=\dfrac{F(t)}{m}$ 的关系可表示为

$$B(t)=\int_0^t f(t)dt \quad (B(0)=0), \tag{7}$$

(6) 式是可以进行均方积分的，因为 (7) 式是维纳过程的定义式，且有

$$E[dB(t)]=0,$$

$$\begin{aligned} E[\{dB(t)\}^2] &= \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} E[f(s)f(t)]dsdt \\ &= \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \frac{2\pi s_0}{m^2}\delta(t-s)dsdt \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{2\pi s_0}{m^2}dt \\ &= \frac{2\pi s_0}{m^2}\Delta t. \end{aligned}$$

式 (6) 的微分方程是伊藤型的，其解（即响应）过程具有良好的马尔柯夫性质，所以转移概率密度函数满足福克-弗朗克方程。应用 (8-4) 式，有

$$-\frac{\partial(a_1p)}{\partial y_1}-\frac{\partial(a_2p)}{\partial y_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{11}p)}{\partial y_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{12}p)}{\partial y_1\partial y_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{21}p)}{\partial y_2\partial y_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(b_{22}p)}{\partial y_2^2}=0, \tag{8}$$

式中 $p=p(y_1, y_2, t|y_{10},y_{20},t_0)$ 是随机变量 y_1 和 y_2 的二维转移概率密度函数。

根据方程 (5) 和激励力 F 的概率特征，可以求得上述福克-弗朗克方程的"系数"：

$$a_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[z_1-y_1]=-2\alpha y_1-\omega_0^2y_2-\mu y_2^3,$$

$$a_2=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[z_2-y_2]=y_1,$$

$$b_{11}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[(z_1-y_1)^2]=\frac{2\pi s_0}{m^2},$$

$$b_{12}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[(z_1-y_1)(z_2-y_2)]=0=b_{21},$$

$$b_{22}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[(z_2-y_2)^2]=0.$$

则方程（8）成为

$$-2n\frac{\partial(y_1p)}{\partial y_1}-(\omega_0^2y_2+\mu y_2^3)\frac{\partial p}{\partial y_1}+y_1\frac{\partial p}{\partial y_2}-$$

$$-\frac{\pi s_0}{m^2}\frac{\partial^2 p}{\partial y_1^2}=0, \tag{9}$$

或写成如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left[(\omega_0^2y_2+\mu y_2^3)p+\frac{\pi s_0}{2nm^2}\frac{\partial p}{\partial y_2}\right]+$$

$$+\left[-\frac{\partial}{\partial y_2}+2n\frac{\partial}{\partial y_1}\right]\left(y_1p+\frac{\pi s_0}{2nm^2}\frac{\partial p}{\partial y_1}\right)=0. \tag{10}$$

方程（10）只有在某些特殊情况下，才能求得精确解，即假定

$$p(y_1,\ y_2)=p_1(y_1)\cdot p_2(y_2), \tag{11}$$

（11）式的意义是认为 y_1 与 y_2 独立不相关．这样，二维概率密度可以用一维概率密度来表示。（10）式就变成

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{p_1\left[(\omega_0^2y_2+\mu y_2^3)p_2+\frac{\pi s_0}{2nm^2}\frac{\partial p_2}{\partial y_2}\right]\right\}+$$

$$+\left[-\frac{\partial}{\partial y_2}+2n\frac{\partial}{\partial y_1}\right]\left[p_2\left(y_1p_1+\frac{\pi s_0}{2nm^2}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}\right)\right]=0, \tag{12}$$

要使（12）式成立，必须是上式各项中括号部等于零，于是有

$$\frac{dp_2}{dy_2}+\frac{(\omega_0^2y_2+\mu y_2^3)2nm^2}{\pi s_0}p_2=0, \tag{13}$$

$$\frac{dp_1}{dy_1}+\frac{2nm^2}{\pi s_0}y_1p_1=0. \tag{14}$$

（13）式的解为

$$p_2(y_2)=c\exp\left(-\frac{nm^2}{\pi s_0}\omega_0^2y_2^2\right)\cdot\exp\left(-\mu\frac{nm^2}{2\pi s_0}y_2^4\right), \tag{15}$$

再应用（4）式及（2）式，得位移 x 的概率密度函数：

$$p(x)=c\exp\left[-\frac{c}{2\pi s_0}\left(kx^2+\frac{k_1}{2}x^4\right)\right], \tag{16}$$

其中积分常数 c 根据概率条件 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1$ 求得

$$c=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r}{2\pi S_0}\left(kx^2+\frac{k_1}{2}x^4\right)\right]dx}. \tag{17}$$

从 (16) 式可以求出位移 x 的所有统计特性，例如位移 x 在 $(-\lambda,\ +\lambda)$ 内的概率为

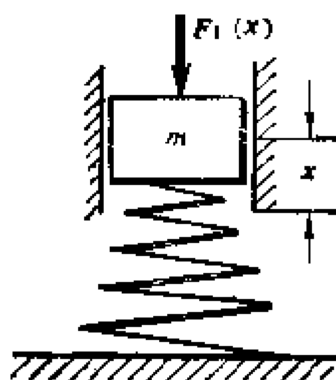
$$\text{Prob}(-\lambda\leqslant x\leqslant\lambda)=c\int_{-\lambda}^{\lambda}\exp\left[-\frac{r}{2\pi S_0}\left(kx^2+\frac{1}{2}k_1x^4\right)\right]dx. \tag{18}$$

位移 x 的均方值为

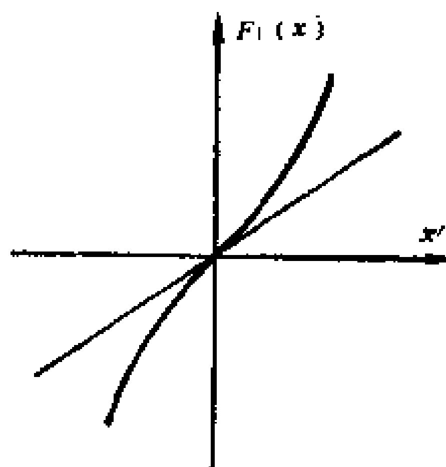
$$E[x^2]=c\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp\left[-\frac{r}{2\pi S_0}\left(kx^2+\frac{1}{2}k_1x^4\right)\right]dx. \tag{19}$$

等等，一般来说，这些积分值可以通过数值积分的方法求出，因为被积函数随着 x 绝对值的增加迅速衰减到零，所以在有限区间内积分就可得到满意的结果。

例题 8-6 例题图 8-6-1 所示系统中，弹簧力的硬非线性特性为 $F_1(x)=kx+k_1x^3$ （见例题图 8-6-2），线性阻尼力为 $r\dot{x}$，在质量 m 上作用着平稳正态的白噪声随机激励力 $f(t)$，且 $m_f=0$，$S_{ff}(\omega)=S_0$。试求：在给定时间 t_s 内，质量 m 的重心超越水平线 a_0 的平均次数 N。



例题图 8-6-1



例题图 8-6-2

解：本题用等价统计线性化方法求解。一般地，对于非线性随机振动

$$m\ddot{x}+F(x,\dot{x})=f(t), \tag{1}$$

式中，$f(t)$为随机激励，$F(x,\dot{x})$为x和$\dot{x}$的非线性随机函数。可以用线性函数来"等价"地替换$F(x,\dot{x})$，即令

$$F(x,\dot{x})\doteq F_{*}=a_1+a_2x_0+a_3\dot{x}_0, \tag{2}$$

式中，$x_0=x-m_x$，$\dot{x}_0=\dot{x}-m_{\dot{x}}$都是均值为零的随机函数，称为中心化的随机函数，$a_i(i=1,\ 2,\ 3)$是有物理意义的待定常数，其值由随机函数的误差项

$$\Delta F=F(x,\dot{x})-F_{*}, \tag{3}$$

方差最小的条件来确定。

若系统是时不变的，振动是平稳非线性的，则ΔF的方差为（这里已认为ΔF的均值为零，故均方值即方差）：

$$E[\Delta F^2]=\iint_{-\infty}^{\infty}[F(x,\dot{x})-a_1-a_2x_0-a_3\dot{x}_0]^2p(x,\dot{x})dxd\dot{x}, \tag{4}$$

式中$p(x,\dot{x})$为x和$\dot{x}$的联合概率密度函数，它是未知函数。若假设$x,\dot{x}$服从独立不相关的二维正态分布，则

$$p(x,\dot{x})=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\exp\left\{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right]\right\}, \tag{5}$$

上式中，考虑了对于平稳随机过程，有$m_{\dot{x}}=0$。

系数a_1、a_2及a_3可以从下述条件求得：

$$\frac{\partial E[(\Delta F)^2]}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{6}$$

当$i=1$时

$$\frac{\partial E[\Delta F^2]}{\partial a_1}=0,$$

即

$$2\iint_{-\infty}^{\infty}[F(x,\dot{x})-a_1-a_2x_0-a_3\dot{x}_0](-1)p(x,\dot{x})dxd\dot{x}=0,$$

由于

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a_1 p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = a_1 \iint_{-\infty}^{\infty} p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = a_1,$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a_2 x_0 p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = \iint_{-\infty}^{\infty} a_2 (x-m_x) p(x,\dot{x})\,d(x-m_x)\,d\dot{x} = 0$$

(因为$(x-m_x)p(x,\dot{x})$是$(x-m_x)$的奇函数，所以在无穷区间内积分为零)，

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a_3 \dot{x}_0 p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = 0$$

(因为$\dot{x}_0 p(x,\dot{x})$为$\dot{x}$的奇函数)。

所以有

$$a_1 = \iint_{-\infty}^{\infty} F(x,\dot{x}) p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x}. \tag{7}$$

当$i=2$时，

$$\frac{\partial E[\Delta F^2]}{\partial a_2} = 0,$$

即

$$-2\iint_{-\infty}^{\infty} [F(x,\dot{x}) - a_1 - a_2 x_0 - a_3 \dot{x}_0] x_0 p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = 0.$$

由于

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a_1 x_0 p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = 0,$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a_2 x_0^2 p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = a_2 \sigma_x^2,$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a_3 x_0 \dot{x}\, p(x,\dot{x})\,dx\,d\dot{x} = 0,$$

所以

$$a_2=\frac{1}{\sigma_x^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,\dot{x})(x-m_x)p(x,\dot{x})dxd\dot{x}. \tag{8}$$

用同样方法可以导出

$$a_3=\frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,\dot{x})\dot{x}p(x,\dot{x})dxd\dot{x}. \tag{9}$$

这样，由(7)、(8)、(9)三式就可完全确定(2)式中的等价线性函数

对于本题所讨论的情况，质量 m 在线性阻尼力和非线性硬特性弹簧力的作用下，其运动微分方程为：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega_0^2x+\mu x^3=\frac{1}{m}f(t), \tag{10}$$

上式左边各符号的意义可参见上题之(3)、(4)式。

(10)式中的 $\mu=0$ 时，方程是线性的，响应为平稳正态过程。当 $\mu\neq0$ 时，方程是非线性的，响应显然不是正态过程，但当 μ 很小时，可假定响应的概率分布很接近(5)式表示的正态分布，于是可用(7)、(8)、(9)式来确定等价线性函数的系数。这里，当然可以令

$$F(x,\dot{x})=2n\dot{x}+\omega_0^2x+\mu x^3,$$

但考虑到 $2n\dot{x}$ 和 ω_0^2x 本身已是线性函数，无须再线性化，所以更简单的方法是令

$$F(x,\dot{x})=\mu x^3\doteq a_1+a_2x_0+a_3\dot{x}_0, \tag{11}$$

x 的函数无论如何不可能与 $\dot{x}_0$ 的函数相等，故上式中 $a_3=0$

$$a_1=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,\dot{x})p(x,\dot{x})dxd\dot{x}$$

$$=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mu x^3\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\exp\left\{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right]\right\}dxd\dot{x}.$$

上述积分中

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}}}\exp\left\{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right\}d\dot{x}=1,$$

令 $x-m_x=u$，则 $x=u+m_x$，

$$a_1=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(u+m_x)^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}\right\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(u^3+3u^2m_x+3um_x^2+m_x^3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{-u^2}{2\sigma_x^2}\right\}du.$$

应用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}y^n\exp\left\{\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right\}dy=$$

$$\begin{cases}0 & (n\text{ 为奇数}),\\ \sqrt{2\pi}\sigma & (n=0),\\ (n-1)(n-3)(n-5)\cdots\times1\times\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1} & (n\text{ 为偶数}).\end{cases}\quad(12)$$

得 $$a_1=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\left\{3m_x\sqrt{2\pi}\sigma_x^3+m_x^3\sqrt{2\pi}\sigma_x\right\}=\mu m_x(m_x^2+$$

$$+3\sigma_x^2).\quad(13)$$

再用类似的方法求 a_2，

$$a_2=\frac{1}{\sigma_x^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\mu x^3(x-m_x)\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\exp\left\{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right]\right\}dxd\dot{x}$$

$$=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mu(u+m_x)^3u\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}\right\}du$$

$$=\frac{\mu}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}(u^3+3u^2m_x+3um_x^2+m_x^3)u\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}\right\}du$$

$$=\frac{u}{\sigma_x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\left\{3\sqrt{2\pi}\sigma_x^5+3m_x^2\sqrt{2\pi}\sigma_x^3\right\}$$

$$= 3\mu(m_x^2+\sigma_x^2), \tag{14}$$

于是线性化后的(10)式成为

$$\ddot{x}_0 + 2n\dot{x}_0 + \omega_0^2(x_0+m_x) + a_1 + a_2 x_0 = \frac{1}{m}f(t), \tag{15}$$

两边取均值，得

$$\omega_0^2 m_x + a_1 = 0, \tag{16}$$

由(16)式和(13)式得联系 m_x 和 σ_x 的第一个方程

$$\mu m_x(m_x^2+3\sigma_x^2) = -\omega_0^2 m_x, \tag{17}$$

(15)式两边减去(16)式两边，得

$$\ddot{x}_0 + 2n\dot{x}_0 + (\omega_0^2+a_2)x_0 = \frac{1}{m}f(t). \tag{18}$$

由(18)式可知输出(x_0 和 $\dot{x}_0$)的谱密度为

$$S_{x_0x_0}(\omega) = \frac{S_0}{m^2|-\omega^2+2ni\omega+\omega_0^2+a_2|^2},$$

$$S_{\dot{x}_0\dot{x}_0}(\omega) = \frac{S_0\omega^2}{m^2|-\omega^2+2ni\omega+\omega_0^2+a_2|^2}.$$

应用留姆斯公式(见附录8)，求出解的均方值(方差)为：

$$\sigma_{x_0}^2 = E[x_0^2] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_0x_0}(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{\pi S_0}{2nm^2[\omega_0^2+3\mu(m_x^2+\sigma_x^2)]}, \tag{19}$$

$$\sigma_{\dot{x}_0}^2 = E[\dot{x}_0^2] = \sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}_0\dot{x}_0}(\omega)\,d\omega = \frac{\pi S_0}{2nm^2}, \tag{20}$$

联列解(17)和(19)式，可求出 σ_x^2 和 m_x，而 $\sigma_{\dot{x}}^2$ 已由(20)式直接给出

在 $m_x=0$ 的特殊情况下，(19)式成为：

$$3\mu\sigma_x^4 + \omega_0^2\sigma_x^2 - \frac{\pi S_0}{2nm^2} = 0,$$

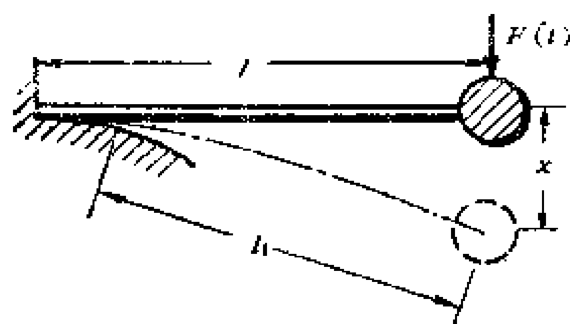
于是

$$\sigma_x^2 = \left(-\frac{\omega_0^2}{6\mu} + \sqrt{\frac{\omega_0^4}{36\mu^2} + \frac{\pi S_0}{6\mu n m^2}}\right)$$

$$(\because \sigma_x^2 \geqslant 0, \therefore \text{根号前舍去负值}), \tag{21}$$

当 $\mu=0$ 时，由(19)式知

$$\sigma_x^2|_{\mu=0}=\frac{\pi S_0}{2\,n m^2 \omega_0^2}. \tag{22}$$



例题图 8-7-1

例题 8-7 例题图 8-7-1 所示悬臂梁，随着挠度增大，梁的计算长度不断缩短，梁给质量 m 的弹性恢复力就不是与梁端点挠度 x 成正比，而是有如下硬特性形式：

$$F_1=kx+k_1x^3,$$

如果在质量 m 上作用有随机力 $F(t)$，且 $F(t)$ 是均值为零的平稳正态白噪声过程，自相关函数 $\phi_{FF}(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau)$。系统的等效粘滞阻尼系数为 c，试求梁端点挠度 x 的均方值

解：本题用摄动法(小参数法)求解。一般地，具有线性阻尼力和非线性恢复力的单自由度系统振动微分方程可表示为：

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2[x+\varepsilon g(x)]=f(t), \tag{1}$$

式中 β 为单位质量的粘性阻尼系数，$f(t)$ 为单位质量的激励，$[x+\varepsilon g(x)]$ 为恢复力的非线性函数。可见恢复力由线性和非线性两部分组成。非线性的规律由函数 $g(x)$ 来描述，而非线性的强弱程度，则由任意参数 ε 来表示。$\varepsilon=0$ 时系统就是线性的。

当 ε 值较小时，称为小参数，(1)式可用摄动法求解。首先假设(1)式的响应 x 可以展成 ε 的幂级数，即

$$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\cdots, \tag{2}$$

已知函数 $g(x)$ 可以在 x_0 邻域展开为台劳级数：

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)[\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots]+$$
$$+\frac{g''(x_0)}{2!}(\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)^2+\cdots, \tag{3}$$

将(2)和(3)式都代入(1)式，再按 ε 的同幂项归并后得

$$[\ddot{x}_0+\beta\dot{x}_0+\omega_0^2x_0-f(t)]+\varepsilon[\ddot{x}_1+\beta\dot{x}_1+\omega_0^2x_1+\omega_0^2g(x_0)]+$$
$$+\varepsilon^2[\ddot{x}_2+\beta\dot{x}_2+\omega_0^2x_2+\omega_0^2x_1g'(x_0)+\cdots=0. \tag{4}$$

由于 ε 为任意小参数，故(4)式能成立的条件是

$$\begin{cases}\ddot{x}_0+\beta\dot{x}_0+\omega_0^2x_0=f(t),\\ \ddot{x}_1+\beta\dot{x}_1+\omega_0^2x_1=-\omega_0^2g(x_0),\\ \ddot{x}_2+\beta\dot{x}_2+\omega_0^2x_2=-\omega_0^2x_1g'(x_0),\\ \cdots\cdots\end{cases} \tag{5}$$

由(5)式可见，等式左边均为线性算子，而非线性成分在上述方程组中可视为"干扰力"

依次求解（5）式中各方程，先解得 x_0，代入第二式，再解得 x_1，继而解得 x_2，x_3，$\cdots$等．然后把结果代入（2）式，即可获得非线性微分方程（1)的近似解．理论上说，解可以达到任意精度，但实际上，由于积分中的困难，一般仅求到 $x_1(t)$为止，也就是取小参数 ε 的一次项，这时 $x(t)$的近似解

$$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)。$$

根据杜哈曼积分，从(5)式有

$$x_0(t)=\int_0^\infty h(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (\tau<0\text{时}, \quad h(\tau)=0), \tag{6}$$

$$x_1(t)=\int_0^\infty h(\tau)\{-\omega_0^2g[x_0(t-\tau)]\}d\tau$$
$$=-\omega_0^2\int_0^\infty h(\tau)g[x_0(t-\tau)]d\tau, \tag{7}$$

式中，$h(\tau)$ 由脉冲响应法求得

$$h(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}}\exp\left(-\frac{\beta\tau}{2}\right)\sin\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}\,\tau \quad (\tau>0) \tag{8}$$

由（6）和（7）式，即可计算响应各概率特征的近似值。如均方值为：

$$E[x^2]=E[(x_0+\varepsilon x_1)^2]=E[x_0^2+2\varepsilon x_0x_1+\varepsilon^2x_1^2]$$
$$=E[x_0^2]+2\varepsilon E[x_0x_1]+\varepsilon^2E[x_1^2], \tag{9}$$

上式右边第三项是高阶微量，可以略去，而右边第一项为

$$E[x_0^2]=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)E[f(t-\tau_1)\cdot f(t-\tau_2)]d\tau_1d\tau_2, \tag{10}$$

右边第二项为

$$E[x_0x_1]=-\omega_0^2\int_0^\infty h(\tau)E\{x_0(t)g[x_0(t-\tau)]\}d\tau, \tag{11}$$

对于本题所讨论的情况，(1) 式中各符号的意义相应为：

$$\beta=\frac{r}{m},\quad \omega_0^2=\frac{k}{m},\quad \varepsilon=\frac{k_1}{k},\quad g(x)=x^3,\quad f(t)=\frac{F(t)}{m},$$

于是

$$E[x_0x_1]=-\omega_0^2\int_0^\infty h(\tau)E[x_0(t)x_0^3(t-\tau)]d\tau, \tag{12}$$

将 (6) 式代入上式，其中 $x_0(t)$有一重积分，$x_0^3(t-\tau)$有三重积分，再加上原来的积分记号，共有五重积分：

$$E[x_0x_1]=-\omega_0^2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1)h(\tau_2)h(\tau_3)h(\tau_4)\times$$
$$\times E[f(t-\tau_1)f(t-\tau-\tau_2)f(t-\tau-\tau_3)f(t-\tau-\tau_4)]\times$$
$$\times d\tau d\tau_1d\tau_2d\tau_3d\tau_4, \tag{13}$$

(13)式表明，$E[x_0x_1]$取决于激励的统计特性和系统的动态特性，现激励是均值为零的正态平稳随机过程，其高阶矩可由过程的二阶矩来表示，

即

$$\begin{cases} E[f(t)]=0, \\ E[f(t_1)f(t_2)]=\phi_{ff}(t_1-t_2), \\ E[f(t_1)f(t_2)f(t_3)]=0, \\ E[f(t_1)f(t_2)f(t_3)f(t_4)]=\phi_{ff}(t_1-t_2)\phi_{ff}(t_3-t_4)+ \\ +\phi_{ff}(t_1-t_3)\phi_{ff}(t_2-t_4)+\phi_{ff}(t_1-t_4)\phi_{ff}(t_2-t_3). \end{cases}$$

这样，(13)式中的

$$E[f(t-\tau_1)f(t-\tau-\tau_2)f(t-\tau-\tau_3)f(t-\tau-\tau_4)]$$
$$=\phi_{ff}(\tau-\tau_1+\tau_2)\cdot\phi_{ff}(\tau_3-\tau_4)+\phi_{ff}(\tau-\tau_1+\tau_3)$$
$$\phi_{ff}(\tau_2-\tau_4)+\phi_{ff}(\tau-\tau_1+\tau_4)\phi_{ff}(\tau_2-\tau_3), \tag{15}$$

应用（6）式，又可得到下面的表达式：

$$\phi_{x_0x_0}(\tau)=E[x_0(t)x_0(t+\tau)]$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)E[f(t+\tau-\tau_1)f(t-\tau_2)]d\tau_1d\tau_2$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)\phi_{ff}(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_3)\phi_{ff}(\tau-\tau_1+\tau_3)d\tau_1d\tau_3$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_4)\phi_{ff}(\tau-\tau_1+\tau_4)d\tau_1d\tau_4, \tag{16}$$

令(16)式中的 $\tau=0$，并把 τ_1 写成 τ_2(或 τ_3)，得

$$\phi_{x_0x_0}(0)=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_2)h(\tau_3)\phi_{ff}(\tau_2-\tau_3)d\tau_2d\tau_3$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_2)h(\tau_4)\phi_{ff}(\tau_2-\tau_4)d\tau_2d\tau_4$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_3)h(\tau_4)\phi_{ff}(\tau_3-\tau_4)d\tau_3d\tau_4. \tag{17}$$

将（15)、(16)、(17）式的关系代入到(13)式，得

$$E[x_0x_1]=-3\,\omega_0^2\phi_{x_0x_0}(0)\int_0^\infty h(\tau)\phi_{x_0x_0}(\tau)d\tau, \tag{18}$$

由于 $E[x_0^2]=\phi_{x_0x_0}(0)$，故最后(9)式可表示为

$$E[x^2]=\phi_{x_0x_0}(0)\left[1-6\,\varepsilon\omega_0^2\int_0^\infty h(\tau)\phi_{x_0x_0}(\tau)d\tau\right]. \tag{19}$$

由题意给定的条件知

$$\phi_{ff}(\tau)=\frac{1}{m^2}2\,\pi S_0\delta(\tau), \tag{20}$$

故

$$\phi_{x_0x_0}(\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\omega_d}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\tau_1\right)\sin\omega_d\tau_1\times$$

$$\times\frac{1}{\omega_d}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\tau_2\right)\sin\omega_d\tau_2\cdot\frac{2\pi S_0}{m^2}\delta(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

$$=\frac{2\pi S_0}{m^2\omega_d^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\beta}{2}\tau_2\right)\sin\omega_d\tau_2d\tau_2\times$$

$$\times\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\beta\tau_1}{2}\right)\sin\omega_d\tau_1\delta(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1$$

$$=\frac{2\pi S_0}{m^2\omega_d^2}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\beta}{2}\tau_2\right)\sin\omega_d\tau_2\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\beta}{2}(\tau+\tau_2)\right\}\sin\omega_d(\tau+\tau_2)d\tau_2.$$

式中 $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}$.

对于小阻尼（即 β 很小）系统，上述积分的近似值为：

$$\phi_{x_0x_0}(\tau)\doteq\hat{\sigma}_x^2\exp\left\{-\frac{\beta\tau}{2}\right\}\left[\cos\omega_d\tau-\frac{\beta}{2\omega_d}\sin\omega_d\tau\right].\qquad(21)$$

式中 $\hat{\sigma}_x^2=\frac{\pi S_0}{m^2\beta\omega_0^2}$，它为 $\varepsilon=0$ 时响应的均方值（也就是方差）

将(21)式和(8)式代入(19)式，在小阻尼的情况下，得积分的近似值为

$$E[x^2]\doteq\hat{\sigma}_x^2(1-3\varepsilon\hat{\sigma}_x^2)=\hat{\sigma}_x^2-3\varepsilon\hat{\sigma}_x^4,\qquad(22)$$

上式右边第二项是非线性恢复力引起的。可见非线性使响应的均方值减少了。当系统是非线性时，即使 $E[x]=0$，$E[x^2]$也不等于$\hat{\sigma}_x^2$

例题 8-8 对于例题 8-5 所示的系统，试比较应用福克-弗朗克方程、等价线性化法及摄动法所求得的响应均方值

解：(1) 应用福克-弗朗克方程

对于例题 8-5 之 (17) 式，引入记号

$$\frac{rh}{2\pi S_0}=b,\qquad\frac{\mu}{\omega_0^2}=\varepsilon,\qquad\frac{r}{2\pi S_0}\cdot\frac{k_1}{2}=\frac{b\varepsilon}{2},$$

则

$$c=1\Big/\int_{-\infty}^{\infty}e^{-bx^2}\left[1-\frac{b\varepsilon}{2}x^4+\frac{1}{2}\left(\frac{b\varepsilon}{2}\right)^2x^8+\cdots\right]dx$$

$$=1\Big/\left[\frac{\sqrt{\pi}}{b^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{8}\frac{b\varepsilon\sqrt{\pi}}{b^{5/2}}+\frac{b^2\varepsilon^2\cdot105\sqrt{\pi}}{2^7b^{9/2}}-\cdots\right],$$

若 ε 很小，取上式括号中的前三项已足够精确，
于是

$$c\doteq\frac{b^{9/2}}{\sqrt{\pi}\left(b^4-\frac{3}{8}\varepsilon b^3+\frac{105}{128}\varepsilon^2b^2\right)}. \tag{1}$$

将（1）式代入例题 8-5 的（19）式，并把（19）式中的被积函数作和刚才同样的处理，得

$$E[x^2]=h_1\hat{\sigma}_x^2. \tag{2}$$

式中 $h_1\doteq\dfrac{1-\frac{15}{8}\mu_1+\frac{945}{128}\mu_1^2}{1-\frac{3}{8}\mu_1+\frac{105}{128}\mu_1^2}$，$\mu_1=\dfrac{\varepsilon}{b}=\dfrac{\pi S_0\mu}{nm^2\omega_0^4}$，为无量纲参数；

$\hat{\sigma}_x^2=\dfrac{\pi S_0}{2nm^2\omega_0^2}$，为 $\mu=0$ 时线性系统响应的均方值（方差）

另外，由例题 8-5 的（16）式，易知 $E[x]=0$，所以（2）式求得的均方值也就是方差。

（2）统计线性化法

参见例题 8-6 之（21）式，可知在 $m_x=0$ 的情况下，

$$\sigma_x^2=E[x^2]=\hat{\sigma}_x^2(-1+\sqrt{1+6\mu_1})\frac{1}{3\mu_1}=h_2\hat{\sigma}_x^2, \tag{3}$$

式中，$h_2=\dfrac{1}{3\mu_1}(-1+\sqrt{1+6\mu_1})$，$\mu_1$ 和 $\hat{\sigma}_x^2$ 的意义同前。

（3）摄动法

参见例题 8-7 的（22）式，应用前面定义的 $\hat{\sigma}_x^2$，μ_1 等记号，有

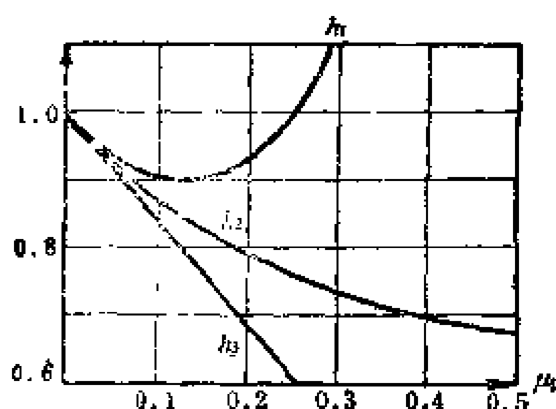
$$E[x^2] = \hat{\sigma}_x^2\left(1-\frac{3}{2}\mu_1\right) = h_3\hat{\sigma}_x^2, \tag{4}$$

式中　$h_3 = 1-\frac{3}{2}\mu_1$.

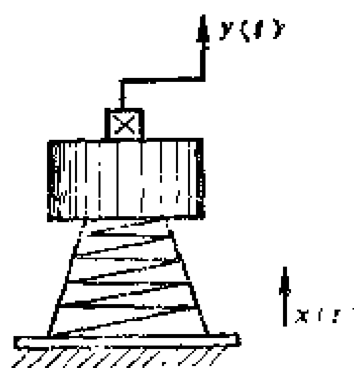
以上（2）、（3）、（4）式中的无量纲系数 h_1，h_2 和 h_3 随 μ_1 的变化曲线如例题图 8-8-1 所示。参考此图可作如下讨论：

（a）三种方法都表明了同一趋向：即 μ_1（也就是 ε）小于 0.1 时，非线性项的存在使响应均方值小于相应的线性系统。

（b）当 $\mu_1 = 0-0.1$ 时，h_1，h_2，h_3 的差别很小，即可以认为三种方法所得的均方值实际上是一致的；当 $\mu_1 > 0.1$ 时，它们的差别可以很大。考虑到三条曲线都是在 ε 很小的假设下得出的，故 μ_1 值较大时，曲线本身的可信度已大大降低。



例题图 8-8-1



例题图 8-9-1

（c）所得的 h_1、h_2、h_3 值都是近似的。因为 FPK 法中，只取了级数的前几项；统计线性化法中，线性等价本身就有误差，而且还作了响应为二维正态分布的近似；摄动法中，只取了一次近似，所以很难说在 h_1、h_2、h_3 中，哪一个更接近真实情况。

（d）鉴于 FPK 法对 ε 的范围并无限制，而且只要所取的级数的项数足够多，h_1 值的精度就可不断提高，而由此引起的计算难度并不增加很多。相对来说，提高统计线性化法（修改二维正态分布的假设）和摄动法（取二次或更高次近似）的精度，要困

难得多，故对于本题所讨论的情况，还是采用 FPK 法为佳。

例题 8-9 如何通过振动测试，根据幅域、时差域、频率域提供的信息，判断减振器是否非线性的？

解：测试装置如例题图 8-9-1 所示。减振器上放有质量 m 的物体，支承面受到的激励为 $x(t)$，装在物体上的传感器测出的响应为 $y(t)$。若激励和响应关系符合下列四个判据之一者，减振器就是非线性的。

(1) 幅域判据：叠加原理不成立。

激励可以是瞬态的、正弦的、或随机的。若第一次激励 x_1 引起的响应为 y_1，第二次激励 x_2 引起的响应为 y_2，第三次激励为 (x_1+x_2)，所得响应为 y，则

$$E[y(x_1+x_2)]\neq E[y_1(x_1)]+E[y_2(x_2)], \tag{1}$$

即单个激励引起的响应之和不等于激励之和引起的响应。式中加了均值记号，是考虑到当激励为随机性质时，响应只能用统计数据来表示。

(2) 幅域判据：正态激励得到非正态响应。

激励是平稳正态随机过程，而响应信号在正态检验时通不过，即响应是非正态分布的。

(3) 时差域判据：激励与响应的互相关函数与脉冲响应函数不成正比。

第一次用单位脉冲锤击法得到减振器与质量组成的系统的脉冲响应函数 $h(t)$，第二次对基础用谱密度为 S_0 的白噪声激励，对激励和响应信号进行处理，得互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$，则

$$h(t)\neq\frac{1}{2\pi S_0}\phi_{xy}(\tau). \tag{2}$$

(4) 频率域判据：常凝聚函数不等于 1

在无噪声干扰的情况下，使基础受随机激动，则随机激励自谱 $S_{xx}(\omega)$，响应自谱 $S_{yy}(\omega)$ 与激励和响应间的互谱 $S_{xy}(\omega)$ 之间所定义的常凝聚函数不等于 1，即

$$\gamma_{xy}^2(\omega)=\frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}\neq 1. \tag{3}$$

得出这些判据的理由是：减振器为线性的充分必要条件是将上述不等式改成等式，且正态激励得到正态响应。因此，若上述不等式成立，减振器就必定是非线性的了。

上述方法不仅可用来对已有的减振器进行判别，而且对要设计的非线性系统的模型进行试验有用。

第八章习题

习题 8-1 对例题 8-1 给出的传递特性，若 $n=2$，试计算其响应的概率密度函数，并图示。

答案： $p_Y(y)=\frac{\sqrt{2}\,|y|}{\sqrt{\pi}}\exp\{-|y|^4/2\}$.

习题 8-2 设一非线性系统的输入为 X，输出为 Y，系统的传递特性为

$$Y=\sin X,$$

已知 X 的概率密度为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2} & (0<x<\pi),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

求 Y 的概率密度函数。

答案：

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & (0<y<1),\\ 0 & (\text{其它}).\end{cases}$$

习题 8-3 试述柯尔莫哥罗夫第一方程与第二方程（即福克-普朗克方程）的联系和区别。如何通过对气体扩散运动规律的研究，来建立柯尔莫哥罗夫第二方程？

习题 8-4 对于一维的福克-普朗克方程，当条件概率密度 $p(x,t|x_0,t_0)$ 随时间均匀分布时，试求 $p(x,t|x_0,t_0)$ 的一般表达式。假设当 $x\to\infty$ 时，p 和 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 都趋于零。（提示：此时有 $\frac{\partial p}{\partial t}=0$.）

答案：$p(x,t|x_0,t_0)=C\exp\left\{-\int\frac{1}{b_1}(b_1'-2a_1)dx\right\}$，积分常数$C$从条件$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$求出。

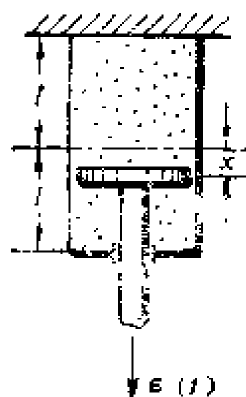
习题 8-5 若随机过程$x(t)$是按坐标x均匀变化的，即从状态x_0变到状态x的概率仅与差值$(x-x_0)$有关，状态变化的平均速度——"系数"$a_1(x,t)$与x无关，而且"系数"$b_1(x,t)$也与x无关。试证此时柯尔莫哥罗夫第二方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-a_1(t)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{2}b_1(t)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

可以变换成

$$\frac{\partial p}{\partial t_1}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2},$$

式中 $\quad t_1=\int_0^t b_1(\varepsilon)d\varepsilon,\ x_1=x-\int_0^t a_1(\varepsilon)d\varepsilon$。



习题图 8-6

习题 8-6 习题图8-6所示为液体减振器，活塞杆上作用有随机力$\varepsilon(t)$，若杆和活塞的自重不计（即不考虑运动件的惯性），则活塞的运动方程为：

$$\alpha\dot{x}=\varepsilon(t),$$

其中α是粘性阻尼系数，$\varepsilon(t)$是平稳白噪声随机激励（力），其概率特征$m_\varepsilon=0$，$\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)=\sigma_\varepsilon^2\delta(\tau)$。已知$t=0$时，活塞在$x=x_0$处，求在任意时刻$t$，活塞位移为$x$的条件概率密度。（提示：初始条件为$p(x,0|x_0,0)=\delta(x-x_0)$，概率条件为$\int_{-l}^{l}p(x,t|x_0,t_0)dx=1$，或近似写成$\int_{-\infty}^{\infty}p(x,t|x_0,t_0)dx=1$。）

答案：

$$p(x,t|x_0,t_0)=\frac{\alpha}{\sigma_\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{2\sigma_\varepsilon^2 t}\right\}.$$

习题 8-7 如果在上题所述的减振器中，活塞杆上除了作用着随机力$\varepsilon(t)$（概率特征同前）外，还作用着小的常力a，则运动方程为

$$\alpha\dot{x}=a+\varepsilon(t),$$

试求在时间T内活塞与缸体两端不碰的概率(即$-l\leq x(t)\leq l$的概率)。（提示：应用分离变量法求解FPK方程；边界条件$p(-l,t)=p(l,t)=0$；初

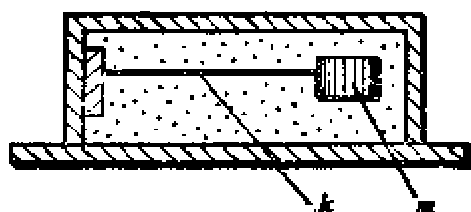
始条件 $p(x,0|x_0,0)=\delta(x)$.)

$$\text{答案：}\ \mathrm{Prob}(T)=\frac{2\cos\left(\frac{a\alpha}{\sigma_t^2}l\right)}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_k^2 T}(-1)^k b_k}{\left(\frac{a^2\alpha^2}{\sigma_t^4}+b_k^2\right)}.$$

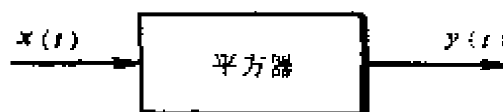
式中
$$b_k=\frac{(2k+1)}{2}\frac{\pi}{l}.$$

$$\lambda_k^2=\frac{\sigma_t^2}{2a^2}\left[\frac{(2k+1)^2}{4}\frac{\pi^2}{l^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\sigma_t^4}\right].$$

习题 8-8 习题图 8-8 所示为加速度计的简化模型，它由质量 m 与线性弹簧(总刚度为 k)弹性连接而成。在质量 m 上除了作用有惯性力外(这是加速度计所要测量的)，还作用着使质量 m 振动的平稳随机激励力 $f(t)$。为了减少随机激励对加速度计读数的影响，质量 m 放在充满高粘性液体的空腔之中。当质量运动时，液体对质量的阻力是与速度 $\dot{x}$ 的平方成正比的。若以 Δx 表示质量 m 偏离平衡位置的距离，则阻力的表达式为



习题图 8-8



习题图 8-10

$$F_r=r\Delta\dot{x}^2\mathrm{sgn}\,\Delta\dot{x},$$

其中 r 是阻尼系数。随机激励力的概率特征已知为：$m_f=0$，$S_{ff}(\omega)=\frac{2\alpha\sigma_f^2}{\alpha^2+\omega^2}$。试用等价线性化法求质量 m 随机位移响应的数学期望 $m_{\Delta x}$，以及位移响应和速度响应的方差 $\sigma_{\Delta x}^2$，$\sigma_{\Delta\dot{x}}^2$。假设振动系统的响应是正态平稳随机过程。

答案： $m_{\Delta x}=\frac{m_f}{k}=0$，

$$\sigma_{\Delta x}^2=\frac{\pi\sqrt{\pi}\ \sigma_f^2\left(\alpha+\frac{4n}{\sqrt{2\pi}}\sigma_{\Delta\dot{x}}\right)}{\sqrt{2}\,rm\omega_0^2\sigma_{\Delta\dot{x}}\left(\alpha^2+\frac{4n}{\sqrt{2\pi}}\sigma_{\Delta\dot{x}}\alpha+\omega_0^2\right)},$$

$$\sigma_{\Delta \dot{x}}^{2} \doteq \frac{\pi\sqrt{\pi}\, a\sigma_{f}^{2}}{\sqrt{2}\, rm\sigma_{\Delta \dot{x}}\left(a^{2}+\frac{4n}{\sqrt{2\pi}}\sigma_{\Delta \dot{x}}a+\omega_{0}^{2}\right)},$$

式中 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$， $n=\frac{r}{m}$。

习题 8-9 若某个单自由度系统的非线性随机振动由下列方程所描述：

$$\ddot{x}+\beta(\dot{x}+\alpha\dot{x}^3)+\omega_0^2 x=f(t),$$

式中 $\beta/\omega_0\ll 1$，$f(t)$为白噪声型正态平稳过程 $\phi_{ff}(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau)$。试用摄动法求响应的均方值 $E[x^2]$。(提示：运算过程中要应用例题 8-7 之(14)式和(21)式的结果以及过程导数的自相关函数和过程本身的自相关函数之间的关系。)

答案：$E[x^2]\doteq\hat{\sigma}_x^2-3\alpha\omega_0^2\hat{\sigma}_x^4$，

式中 $\hat{\sigma}_x^2=\frac{\pi S_0}{\beta\omega_0^2}$，为 $\alpha=0$ 时响应的方差。

习题 8-10 考虑习题图 8-10 所示的非线性系统，输出和输入的关系为

$$y(t)=x^2(t),$$

已知输入 $x(t)$是具有均值 m_x 和自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$的平稳随机过程，试求：

(a) $m_y(t)$ 和 $\phi_{yy}(t_1,t_2)$ 的表达式；

(b) 仅从已知条件可以估计 $m_y(t)$吗？可以估计 $\phi_{yy}(t_1,t_2)$ 吗？

(c) $y(t)$ 是广义平稳随机过程吗？

答案：(a) $m_y(t)=\phi_{xx}(0)$，$\phi_{yy}(t_1,t_2)=E[x^2(t_1)x^2(t_2)]$。

(b) $m_y(t)$是可以估计的，因为 $\phi_{xx}(\tau)$给定后，易求得 $\phi_{xx}(0)$；但 $\phi_{yy}(t_1,t_2)$不能确定，因为 $E[x^2(t_1)x^2(t_2)]$是四阶矩，已知的 $\phi_{xx}(t_1,t_2)$只是二阶矩，通常不能由二阶矩来确定四阶矩。

(c) 不能确定，因为不能证明 $\phi_{yy}(t_1,t_2)$仅依赖于 $|t_2-t_1|$。

参 考 文 献

[1] S. H. 克兰德尔，随机振动，科学出版社，1980。
[2] Lin Y.K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967.
[3] T. T. Soong, Random Differential Equations in Science and

Engineering, Academic Press, 1974.
[4] 清华大学振动组，机械振动，中册，机械工业出版社，1984。
[5] 复旦大学数学系主编，概率论与数理统计，上海科学技术出版社，1978.
[6] 庄表中、陈乃立、秦晓芬，非线性减振器的鉴别及其受白噪声激励时的响应分析，振动与冲击，1984，第2期。

第九章 随机振动理论与信号处理技术相结合的工程问题

在近代随机振动问题的研究中，已将理论分析（包括计算）、实物测试（或模型测试）与信号处理技术三者密切结合起来。这在解决车辆、大型结构物、机械、航天器、地震工程等重要的随机振动问题中，显得十分必要和有效。主要有三个原因：

（1）工程中的实际结构物是复杂的，在计算之前需要有一个简化模型，此类简化模型与实际结构物之间有差异，虽然已用正确的理论作了分析并用可信的方法进行了计算，但也需要通过测试进行验证和修改。

（2）要获得各域信息，用人工计算几乎是不可能的。因为数据的随机性和传递信息的信号复杂性，使工作量变得异常巨大。只有应用FFT（快速傅里叶变换）方法与电子计算机原理相结合的信号处理机，才能以最快的速度最多地获得各域信息，这类信息可以多达几十个，可按研究问题的需要进行选择。

（3）随机振动理论不仅能解决振动理论难以解决的工程问题，而且对于实验和信号处理技术有着必不可少的指导作用，如测点布置、传感器的选择、信息的选择、试验方案的制订、随机振动的复现、等价模拟、强化条件、设计的修改、产品的优化和产品的改进等等。

随机振动理论与测试信号处理技术相结合的方法，在振动的各类研究课目中，有着广泛的应用。

在求响应的课目中有：结构物的强度、刚度；各类枪、炮的瞄准性和命中率；乘座的舒适性；加工机械的加工精度等。

在识别系统动态特性的课目中有：识别动态系统的悬挂特性；产品包装的传递率和减振特性；操纵机构的灵敏度、操纵性

和稳定性；鉴别系统是否非线性等等。

在环境预测课目中有：激励的环境谱和激励的各域信息特征；多激振源的探索和各激振源在响应中的比重等。

以上每个课目中都有大量的应用问题，本章将选择若干典型的问题进行分析。

一、内 容 提 要

1．信号处理与信息的各域描述

对于简单的原始信号，有的可以直接提供一些信息，但是往往是有限的，不能满足对振动问题全面、深入分析的需要，所以只有将信号进行处理（变换技术就是一种重要的处理方法）才能得到许多域的各种信息。

这些处理技术的理论依据是数学中的概率统计和变换原理（如对数变换，付里叶变换，Z变换，沃尔什变换）等。随着现代电子技术的发展，出现了一系列新的技术手段，使信息的收集、贮存、加工、传递愈来愈机械化和自动化。目前在多数信号处理机中，一般可以得到以下几种域的信息。

(1) 时域：均值 m_x，均方值 $E[x^2]$，方差 $D[x]$，有效值 $\sqrt{E[x^2]}$ 等。

(2) 幅域：概率密度函数 $p(x)$，概率分布函数 $P(x)$等。

(3) 时差域：自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$，互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$，互相关系数 $\rho_{xy}(\tau)$等。

(4) 频率域：自功率谱密度函数 $S_{xx}(\omega)$，互谱密度 $S_{xy}(\omega)$，凝聚函数 $\gamma_{xy}^2(\omega)$等。

(5) 计数域：峰值计数 $P(c)$，变程计数 $V(c)$等。

(6) 转速域：幅值变化函数 A，阶次变化函数 O 等。

(7) 转角域：压力分布函数 $p(\theta)$，能量分布函数 $E(\theta)$等。

(8) 倒频谱域(Cepstrum)。

此外，还有倒频率域，倒谐波域，倒相位域，倒滤波域等

等。振动信号经过处理后，可以得到几十种不同域中的信息。其中有的是数，有的是实函数，有的是复函数。各域的信息均有它的数学定义和应用的物理意义，且信息之间存在着一定的数学关系，也就是可以互求的关系。

2．平稳随机过程各域信息间的一些关系

（1）平均值

$$E[x]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx;$$

$$E[x]=\sqrt{\phi_{xx}(\infty)};$$

$$E[x]=\sqrt{\phi_{xx}(0)-D[x]};$$

$$E[x]=\sqrt{\int_{0-}^{0+}S_{xx}(0)d\omega}。$$

（2）均方值

$$E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx;$$

$$E[x^2]=\phi_{xx}(\tau=0);$$

$$E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)d\omega;$$

$$E[x^2]=D[x]+(E[x])^2。$$

（3）自相关函数

$$\phi_{xx}(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)];$$

$$\phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega;$$

$$\phi_{xx}(\tau)=\sigma_x^2\rho(\tau)+(E[x])^2.$$

（4）互相关函数

$$\phi_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t+\tau)];$$

$$\phi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega;$$

$$\phi_{xy}(\tau)=\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}(\tau)+m_xm_y.$$

（5）频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{y_0}{x_0}e^{i\phi(\omega)},$$

$$H(\omega)=A(\omega)+iB(\omega);$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)};$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt;$$

$$|H(\omega)|=\sqrt{\frac{S_{yy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}};$$

$$H(\omega)=\frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)};$$

$$H(\omega)=H(s)|_{s=i\omega}.$$

（6）脉冲响应函数

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega;$$

$$h(t)=\frac{\phi_{xy}(\tau)}{2\pi S_0}\text{（激励 }x(t)\text{为白噪声，}\phi_{xx}(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau)\text{）}.$$

二、实 例 分 析

实例 1　车辆的随机振动

由路面不平度激起的车辆（如汽车、拖拉机、坦克、工程机械等）振动，主要用行驶平顺性和车轮动载荷的变动来评价。车辆行驶平顺性，是指汽车在一般使用速度范围内行驶时，能保证乘坐者不致因车身振动而引起不舒适和疲乏感觉，或保证运输货物不被损伤的性能。车轮动载荷变动是指由道路不平度引起的车辆承载系统零部件的垂直加速度使路面对车轮的垂直作用力发生变化的情况。车轮动载荷的变动影响到车辆上承载零部件的动强度。平顺性和车轮动载变动主要取决于车辆结构参数的动态特性。

车辆行驶平顺性一般用加速度、加加速度（又称跃变度）、能量这三种指标来衡量。其中加速度为用得最久和最重要的指标。国际标准组织（ISO）已提出了在 1—100 赫振动频率范围内，对于

求平及垂直方向的加速度，人体的振动承受曲线，即人在这种加速度下能坚持正常工作的时间（见附录）

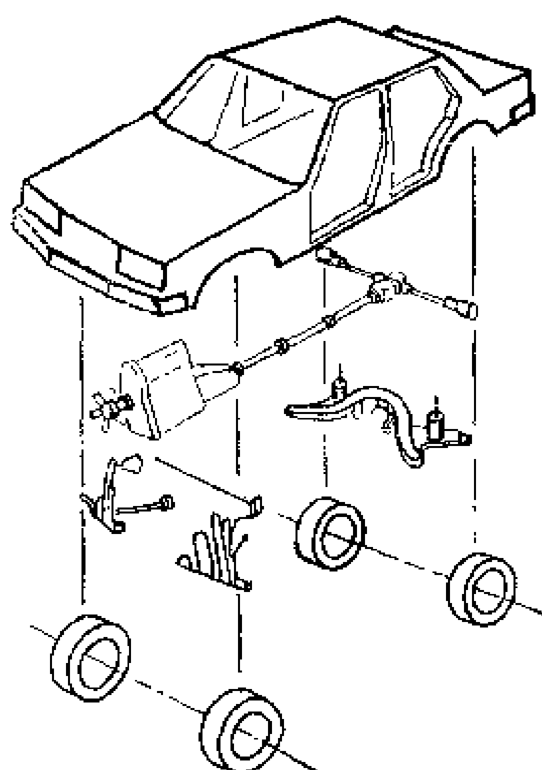


图 9-1-1

设计车辆时，要预测频率在1—50赫内的频率响应函数矩阵，这样才可以初评行驶平顺性和结构的动力强度等信息以及低频范围内噪声信息。图 9-1-1 表示一种试验车的主要工作部件，现以该车左前轮激励引起左后轮的响应为例，来说明频率响应函数的求法

首先将车辆外壳由简到繁地简化为下列四种数学模型，然后逐种进行计算或模拟试验以比较其结果。

（1）将整个外壳作为刚体来简化，计算或用模型在振动台上扫描得频率响应函数，如图 9-1-2 所示。

（2）用降阶法，把弹性子系统简化为 24 个自由度的系统，并变换到状态空间，用模态变换计算频率响应函数，如图 9-1-3 所示

（3）图 9-1-4 表示简化为 1037 个自由度的有限元结构，通过求数值解，得左后轮的频率响应函数，如图 9-1-5 所示。

（4）用弹性子系统的动力凝聚法，计算出频率响应函数，如图 9-1-6 所示

对于上述四种处理模型，在 1—20 赫内频率响应函数是很相似的。从 20—50 赫，只有前两种有类似的结果。

对复杂的力学系统（如电视发射塔，汽车外壳等）动态特性的理论研究中，往往需要回答下列问题：

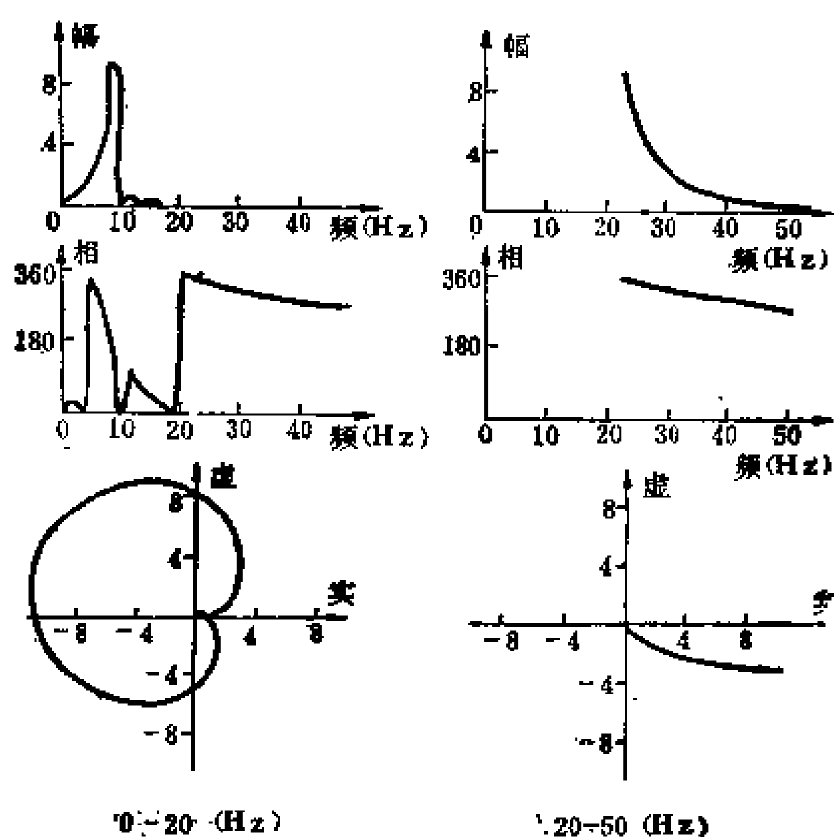


图 9-1-2

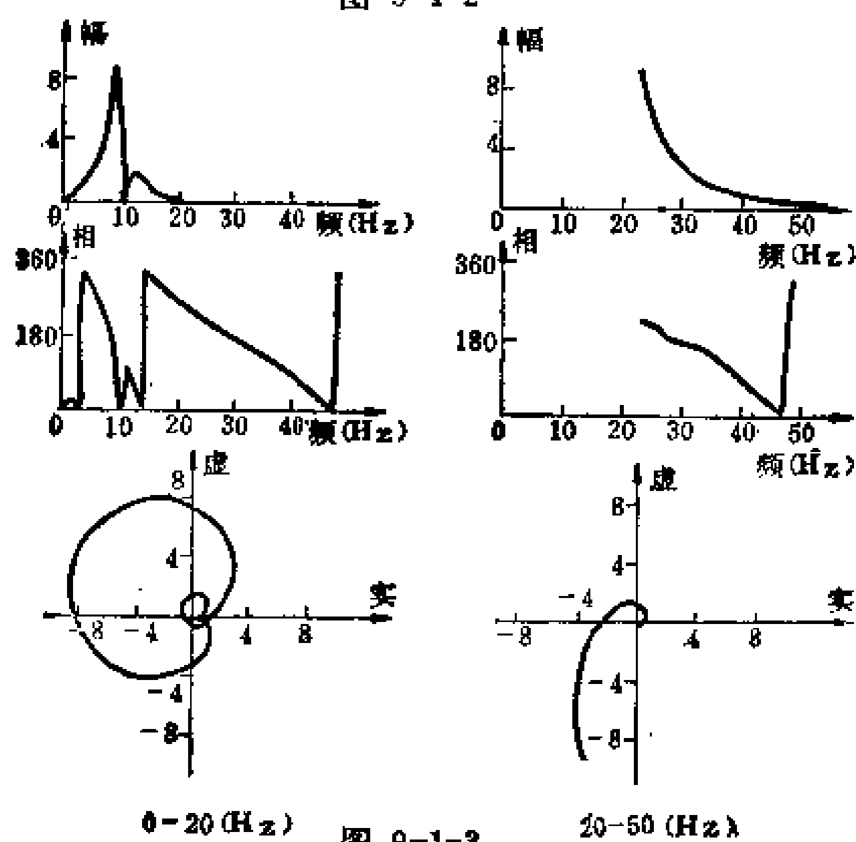


图 9-1-3

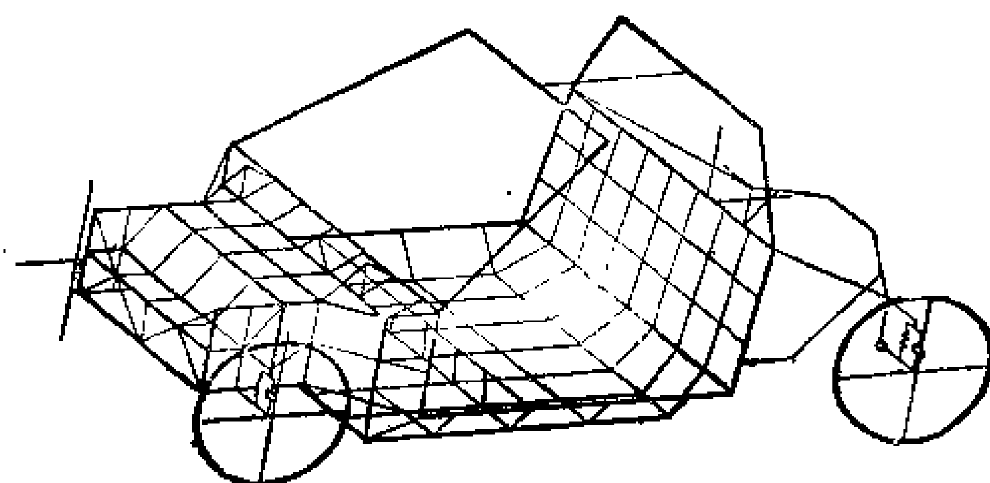


图 9-1-4

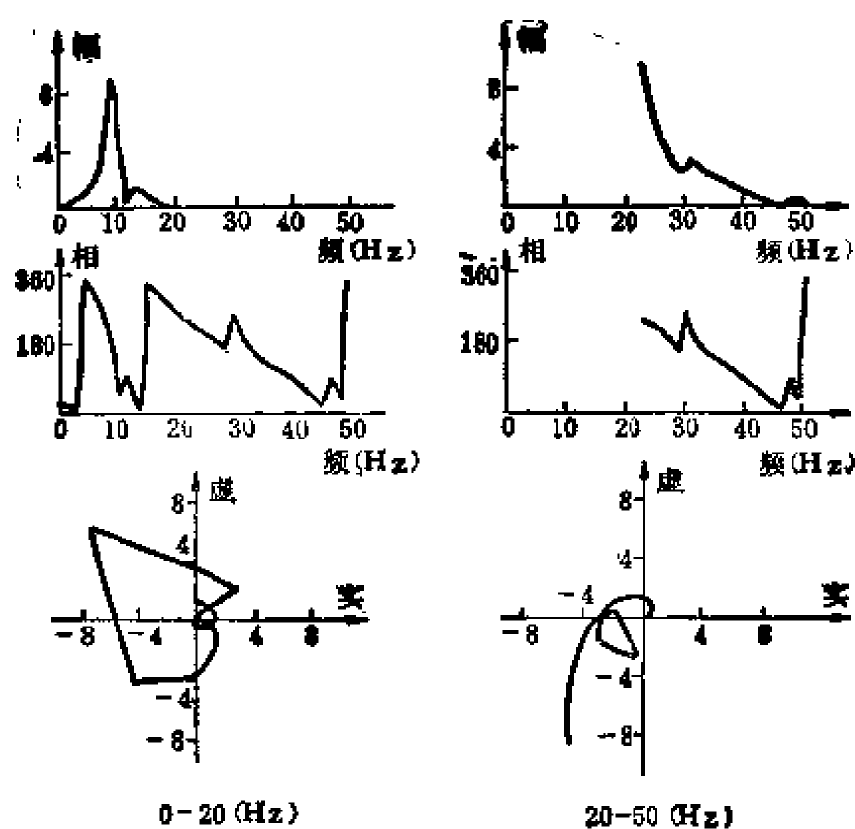


图 9-1-5

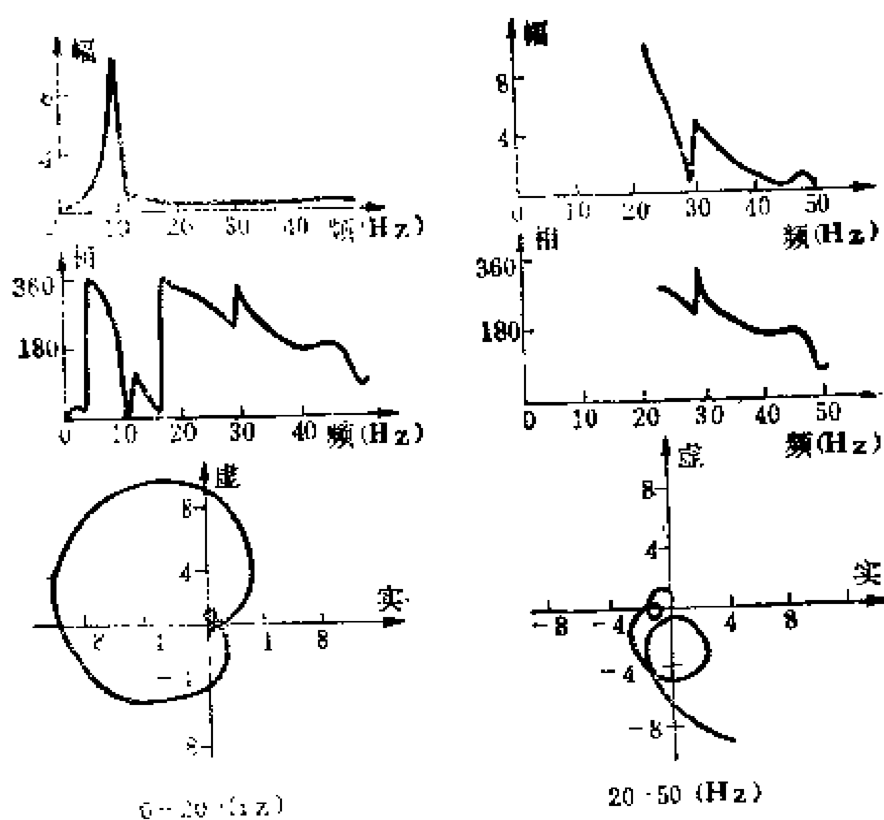


图 9-1-6

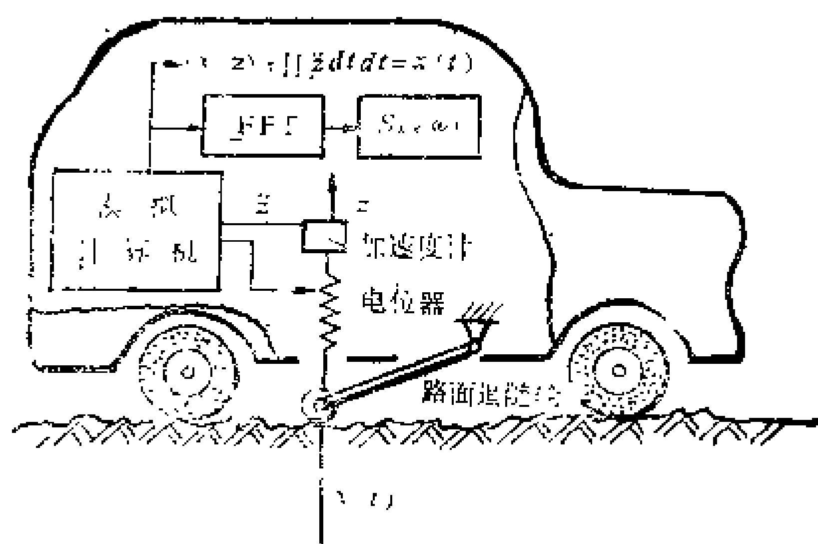


图 9-1-7

(1) 系统整体(看作刚体运动)之重心的动态特性。

(2) 结构动力学的响应预测。

(3) 非模态阻尼的排列。

(4) 组合系统(机械、电或水力、气动装置等)的动态响应

对车辆行驶路面的测量与分析，国内不少单位进行过有成效的工作。图 9-1-7 所示为一种路面计，图中 x 为路面追随轮的铅垂位移，即路面不平度；z 为车身的铅垂绝对位移；$(x-z)$ 为车身和追随轮（即路面）的相对位移；$\ddot{z}$ 为车身的铅垂绝对加速度。它们之间的运算关系是

$$(x-z)+\iint \ddot{z}\,dt\,dt=x-z+z=x$$

对于路面不平度的谱密度，苏联学者采用的函数式如表 9-1-1 所示。

表 9-1-1 几种路面谱（v 为车速，单位：米/秒）

路面类型	谱密度表达导
平滑的大卵石路	$S_{QQ}(\omega)=\dfrac{0.143v}{\omega^2+0.2v^2}$
有坑和峰的大卵石路	$S_{QQ}(\omega)=\dfrac{0.135v}{\omega^2+0.25v^2}+\dfrac{0.0096v(\omega^2+4.04v^2)}{\omega^4-3.69v^2+0.64v^4}$
沥青路	$S_{QQ}(\omega)=\dfrac{0.054v}{\omega^2+0.04v^2}+\dfrac{0.0024v(\omega^2+0.36v^2)}{(\omega^2-0.36v^2)^2+0.0036v^4}$
水泥路	$S_{QQ}(\omega)=\dfrac{0.019v}{\omega^2+0.0023v^2}$

斯韦特利茨基在他的著作[1] 中给出了与此类似的式子（式中 v 的意义同上），以灰土为基础的乡村道路：

$$S_{QQ}(\omega)=96.40\left[\frac{0.0627v}{0.0039v^2+(\omega-0.196v)^2}+\right.$$

1) 见本章参考文献[8]。

$$+\frac{0.0627v}{0.0039v^2+(\omega-0.196v)^2}\Big].\tag{1}$$

圆石子路：

$$S_{QQ}(\omega)=20\left(\frac{0.1v}{0.0025v^2+\omega^2}\right).\tag{2}$$

鹅卵石路：

$$S_{QQ}(\omega)=1.21\frac{(\omega^2+2.09v^2)v}{(\omega^2-2.09v^2)^2+0.184\omega^2v^2}+$$

$$+\frac{182v}{\omega^2+13v^2}.\tag{3}$$

而欧、美、日本等国学者采用另一种函数式，例如

$$S_{QQ}(\Omega)=\begin{cases}0 & (|\Omega|\leqslant\Omega_1),\\ C/\Omega^2 & (\Omega_1<|\Omega|<\Omega_2),\\ 0 & (|\Omega|\geqslant\Omega_2).\end{cases}\tag{4}$$

式中 Ω 为空间频率， $\Omega=\frac{2\pi}{l}$， l 为波长，C 为不平度系数，其谱密度曲线如图 9-1-8 所示。

Ω 与时间频率 ω 的关系为：

$$\omega=v\Omega=\frac{2\pi v}{l},$$

这里，v 为车辆行驶速度，所以 $S_{QQ}(\omega)=S_{QQ}(\Omega)\frac{1}{v}$.

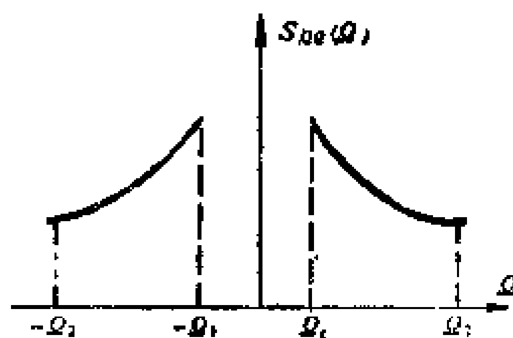


图 9-1-8

还有一种道路谱用

$$S_{QQ}(\Omega)=S(\Omega_0)\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{-W},\tag{5}$$

式中 Ω_0 为标准行程圆频率，$S(\Omega_0)$ 表示不平度的度量，即表明道路的好坏情况，而 W 作为波形特性的度量．即表示道路示要具有长波，还是也具有密度值相当大的短波。各种道路的平均值如表9-1-2 所示。

表 9-1-2 几种不同路面谱的平均值[$\Omega_0=10^{-2}$(1/厘米)]

路面种类	路面状况	平均值	
		W	$S(\Omega_0)$(厘米^3)
水泥混凝土	很好	2.29	0.6
	好	1.97	4.5
	中等	1.97	8.7
	不好	1.72	56.3
沥青混凝土	很好	2.20	1.3
	好	2.18	6.0
	中等	2.18	22.3
碎石铺面路	好	2.26	8.9
	中等	2.26	20.8
	不好	2.15	42.9
	很不好	2.15	158
铺石路	好	1.75	13.7
	中等	1.75	22.8
	不好	1.81	36.4
	很不好	1.81	323
不坚实的道路	好	2.25	31.8
	中等	2.25	165
	不好	2.14	602
	很不好	2.14	16300

(4)、(5)两式在以双对数坐标绘制的功率谱密度图上将为直线。道路谱的近似函数式还有比这更简单的：

$$S(\Omega)=\frac{A}{\Omega^2}, \tag{6}$$

变换成对时间频率的谱密度，则为：

$$S(\omega)=2\pi Av\frac{1}{\omega^2}, \tag{7}$$

式中A为因路面而不同的常数，v为车辆行驶速度，$\omega=2\pi f$为路面某种波形成分的圆频率。

经研究，可知以上两种不同类型的函数式并无多大本质上的差别，仅是在频率接近于零的区段用苏联学者的公式较为合理。但总的来说，欧、美学者所推荐的公式较简单直观。

汽车是个多输入多输出系统，其上第j个响应y_j的谱密度可用下式计算：

$$S_{y_jy_j}(\omega)=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}H^*_{x_ry_j}(\omega)H_{x_sy_j}(\omega)S_{x_rx_s}(\omega)$$

$$(j=1,2\cdots,n), \tag{8}$$

式中m为输入数，n表示输出数，$H^*_{x_ry_j}(\omega)$为第r个输入引起第j个输出的共轭频率响应函数，$H_{x_sy_j}(\omega)$表示第s个输入引起第j个输出的频率响应函数，$S_{x_rx_s}(\omega)$为第r个输入和第s个输入的互谱密度（当$s=r$时，即为第r个输入的自谱密度）。

均方值按下式计算：

$$E[y_j^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{y_jy_j}(\omega)d\omega \quad (j=1,2,\cdots n), \tag{9}$$

如果假定汽车几个车轮受到的激励互不相关，则响应等于各车轮单独激励时响应之和。而对于单输入线性系统，(8)式简化为：

$$S_{y_jy_j}(\omega)=|H_{x_ry_j}(\omega)|^2S_{x_rx_r}(\omega) \quad (j=1,2,\cdots,n), \tag{10}$$

式中$S_{x_rx_r}(\omega)$已由表9-1-2和(1)至(7)式提供。

国内曾对某种国产吉普车右后座下的加速度响应自谱进

行测试，测试的情况分别是：

车速 20 公里/小时，在好的水泥路面上；

车速 20 公里/小时，在中等的碎石路面上；

车速 20 公里/小时，在中等的碎石路面上；

测试的结果表明：车速增大、路面变坏时，右后座下的加速度自谱密度值也随之增大。

实例 2 发电机转子在地震激励下的响应

在发电厂的抗震设计中，研究发电机转子在地震激励下的振动特性是一个非常重要的问题。为此，可先建立转子的力学简化模型，列出运动微分方程，求得频率响应函数；随后根据地震激励谱和系统的频率响应函数，确定转子动态响应（如重心的位移、加速度、轴承的载荷等）的均方值。

1．大电机转子的力学模型

由简单到复杂采用以下三种模型：

（1）刚性旋转体，见图 9-2-1。

（2）具有分布质量的弹性旋转体，图同上。

（3）带有圆盘集中质量的弹性旋转体，见图 9-2-2。

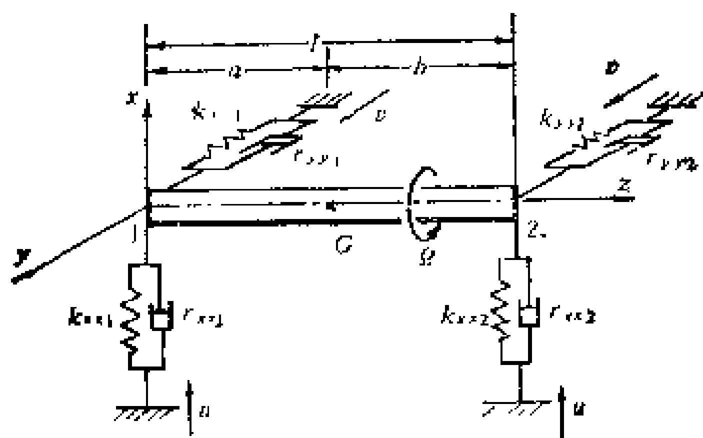


图 9-2-1

对每一种模型，都考虑了陀螺力矩的作用，并认为旋转体两端的轴承是有弹性的，且存在油阻尼，因此分别用互相耦合的线

性弹簧和阻尼器模拟。后两种模型，还考虑了转子弹性的影响。选空间绝对坐标系 xyz 如图 9-2-1 所示。

为了求每种模型的动态特性——频率响应函数，首先对每一种模型建立振动微分方程。

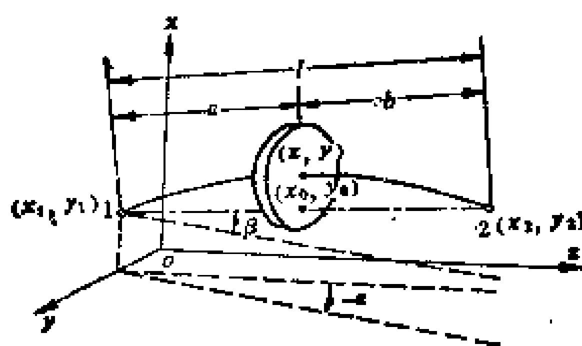


图 9-2-2

(1) 第一种模型的运动微分方程如下：

$$\rho l(\ddot{\delta}_{xG} + \ddot{u}) = F_{x_1} + F_{x_2}, \tag{1}$$

$$\rho l(\ddot{\delta}_{yG} + \ddot{v}) = F_{y_1} + F_{y_2}, \tag{2}$$

$$I_a\ddot{\alpha} + I_p l\Omega\dot{\beta} = -F_{y_1}a + F_{y_2}\cdot b, \tag{3}$$

$$I_a\ddot{\beta} - I_p l\Omega\dot{\alpha} = F_{x_1}a - F_{x_2}\cdot b, \tag{4}$$

式中 a，b 为轴的重心到两轴承的距离，

l 为两轴承跨距，

ρ 为单位长度的质量，

I_a 为过重心横轴的极惯矩，

I_p 为单位长度的极转动惯量，

Ω 为轴的旋转角速度(常数)、

$\alpha(t)$，$\beta(t)$分别为绕 x 轴和 y 轴的角位移，

$\delta_{xG}(t)$，$\delta_{yG}(t)$分别为重心 G 相对于支承点的位移在 x，y 方向的分量，

$\ddot{u}$，$\ddot{v}$ 分别为支承处输入加速度的 x，y 方向的分量，

F_{x_1}，F_{x_2}，F_{y_1}，F_{y_2} 分别为轴承 1、2 上 x 和 y 方向的载荷。

在(1)—(4)式中：

$$
\begin{cases}
F_{x_1}=-k_{xx_1}(\delta_{xG}-a\beta)-k_{xy_1}(\delta_{yG}+a\alpha) \\
\qquad -r_{xx_1}(\dot{\delta}_{xG}-a\dot{\beta})-r_{xy_1}(\dot{\delta}_{yG}+a\dot{\alpha}), \\
F_{x_2}=-k_{xx_2}(\delta_{xG}+b\cdot\beta)-k_{xy_2}(\delta_{yG}-b\alpha) \\
\qquad -r_{xx_2}(\dot{\delta}_{xG}+b\dot{\beta})-r_{xy_2}(\dot{\delta}_{yG}-b\cdot\dot{\alpha}), \\
F_{y_1}=-k_{yy_1}(\delta_{yG}+a\alpha)-k_{yx_1}(\delta_{xG}-a\beta) \\
\qquad -r_{yy_1}(\dot{\delta}_{yG}+a\dot{\alpha})-r_{yx_1}(\dot{\delta}_{xG}-a\dot{\beta}), \\
F_{y_2}=-k_{yy_2}(\delta_{yG}-b\alpha)-k_{yx_2}(\delta_{xG}+b\beta) \\
\qquad -r_{yy_2}(\dot{\delta}_{yG}-b\dot{\alpha})-r_{yx_2}(\dot{\delta}_{xG}+b\dot{\beta}),
\end{cases}
\tag{5}
$$

式中　k_{ijn} 分别为轴承油膜的刚度系数($i=x$，y，$j=x$，y，$n=1$，2)，脚标 i 表示力的方向，j 表示位移方向，n 表示轴承号数。

r_{ijn} 分别为轴承油膜的阻尼系数，脚标意义同上。

2）第二种模型

认为转子是整个跨度上具有均匀横截面及均匀分布质量的弹性转体，计及陀螺力矩和横截面的转动惯量，建立其运动方程如下：

$$
\rho\left(\frac{\partial^2\delta_x}{\partial t^2}+\ddot{x}\right)=-EI\frac{\partial^4\delta_x}{\partial z^4}+I_r\frac{\partial^4\delta_x}{\partial z^2\partial t^2}+I_p\Omega\frac{\partial^3\delta_y}{\partial z^2\partial t}+F_{x_1}\delta(z)+F_{x_2}\delta(z-l), \tag{6}
$$

$$
\rho\left(\frac{\partial^2\delta_y}{\partial t^2}+\ddot{y}\right)=-EI\frac{\partial^4\delta_y}{\partial z^4}+I_r\frac{\partial^4\delta_y}{\partial z^2\partial t^2}-I_p\Omega\frac{\partial^3\delta_x}{\partial z^2\partial t}+F_{y_1}\delta(z)+F_{y_2}\delta(z-l), \tag{7}
$$

式中　$\delta_x(z,t)$，$\delta_y(z,t)$分别为距支承点 z 处的相对位移的 x 向和 y 向分量$\left(\delta_x\left(\frac{1}{2},t\right)=\delta_{xG}(t),\quad \delta_y\left(\frac{1}{2},t\right)=\delta_{yG}(t)\right)$，

E 为弹性模量，

I 为横截面的惯性矩，

I_r为单位长度横向的惯性矩。

在(6)、(7)两式中：

$$
\begin{cases}
F_{x_1}=-k_{xx_1}\delta_x(0,t)-k_{xy_1}\delta_y(0,t)-\\
\quad -r_{xx_1}\dot{\delta}_x(0,t)-r_{xy_1}\dot{\delta}_y(0,t),\\
F_{x_2}=-k_{xx_2}\delta_x(l,t)-k_{xy_2}\delta_y(l,t)-\\
\quad -r_{xx_2}\dot{\delta}_x(l,t)-r_{xy_2}\dot{\delta}_y(l,t),\\
F_{y_1}=-k_{yx_1}\delta_x(0,t)-k_{yy_1}\delta_y(0,t)-\\
\quad -r_{yy_1}\dot{\delta}_y(0,t)-r_{yx_1}\dot{\delta}_x(0,t),\\
F_{y_2}=-k_{yy_2}\delta_y(l,t)-k_{yx_2}\delta_x(l,t)-\\
\quad -r_{yy_2}\dot{\delta}_y(l,t)-r_{yx_2}\dot{\delta}_x(l,t),
\end{cases}
\tag{8}
$$

若令复数 $\Delta(z,t)=\delta_x(z,t)+i\delta_y(z,t)$，$\gamma=u+iv$，则方程(6)、(7)两式可以合併成一式，即

$$
\rho\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}-\ddot{\gamma}\right)=-EI\frac{\partial^4\Delta}{\partial z^4}+I_r\frac{\partial^4\Delta}{\partial z^2\partial t^2}-iI_p\Omega\frac{\partial^3\Delta}{\partial z^2\partial t}+
$$

$$
+\{F_{x_1}\delta(z)+F_{x_2}\delta(z-l)\}+i\{F_{y_1}\delta(z)+F_{y_2}\delta(z-l)\} \tag{9}
$$

关于转子的边界条件，认为两端是自由端，即 $z=0$，l 时，弯矩和切力为零，得

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right|_{z=0,l}=0,\\
\left.EI\dfrac{\partial^3\Delta}{\partial z^3}-I_r\dfrac{\partial^3\Delta}{\partial z\partial t^2}+iI_p\Omega\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial z\partial t}\right|_{z=0,l}=0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

(3) 第三种模型

将转子看作集中质量圆盘和只具有弹性的旋转轴组成的振动系统。圆盘的运动方程为：

$$m\ddot{x}_c=-k_{11}(x_c-x_0)-k_{12}(\theta_y-\beta), \tag{11}$$

$$m\ddot{y}_c=-k_{11}(y_c-y_0)-k_{12}(\theta_x-\alpha), \tag{12}$$

$$I_d\ddot{\theta}_x+I_p\Omega\dot{\theta}_y=-k_{21}(y_c-y_0)-k_{22}(\theta_x-\alpha), \tag{13}$$

$$I_d\ddot{\theta}_y-I_p\Omega\dot{\theta}_x=-k_{21}(x_c-x_0)-k_{22}(\theta_y-\beta), \tag{14}$$

式中　k_{11}、k_{12} 分别为恢复力与挠度、恢复力与斜率之比，

k_{21}、k_{22} 分别为恢复力矩与挠度、恢复力矩与斜率之比。

m 为圆盘质量，

I_D 为圆盘的横向惯性矩，

$I_p = 2I_D$ 为圆盘极惯矩，

x_1, y_1, x_2, y_2 分别为轴承 1 和轴承 2 位移的 x 向 y 向分量，

$x_G(t)$，$y_G(t)$ 分别为圆盘中心位移的 x 向和 y 向分量，

$\theta_x(t), \theta_y(t)$ 分别为圆盘绕 x 轴和 y 轴的角位移，

x_0、y_0 分别为旋转体两端的连线与圆盘交点的坐标。

轴承的载荷为

$$
\begin{aligned}
F_{x1} &= -\frac{b}{l}\{k_{11}(x_G - x_0) - k_{12}(\theta_y - \beta)\} - \frac{1}{l}\{k_{21}(x_G - x_0) - k_{22}(\theta_y - \beta)\} \\
&= -k_{xx1}(x_1 - u) - k_{xy1}(y_1 - v) - r_{xx1}(\dot{x}_1 - \dot{u}) - r_{xy1}(\dot{y}_1 - \dot{v}),
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{x2} &= -\frac{a}{l}\{k_{11}(x_G - x_0) - k_{12}(\theta_y - \beta)\} + \frac{1}{l}\{k_{21}(x_G - x_0) - k_{22}(\theta_y - \beta)\} \\
&= -k_{xx2}(x_2 - u) - k_{xy2}(y_2 - v) - r_{xx2}(\dot{x}_2 - \dot{u}) - r_{xy2}(\dot{y}_2 - \dot{v}),
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{y1} &= -\frac{b}{l}\{k_{11}(y_G - y_0) + k_{12}(\theta_x - \alpha)\} + \frac{1}{l}\{-k_{21}(y_G - y_0) - k_{22}(\theta_x - \alpha)\} \\
&= -k_{yy1}(y_1 - v) - k_{yx1}(x_1 - u) - r_{yy1}(\dot{y}_1 - \dot{v}) - r_{yx1}(\dot{x}_1 - \dot{u}),
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{y2} &= -\frac{a}{l}\{k_{11}(y_G - y_0) + k_{12}(\theta_x - \alpha)\} - \frac{1}{l}\{-k_{21}(y_G - y_0) - k_{22}(\theta_x - \alpha)\} \\
&= -k_{yy2}(y_2 - v) - k_{yx2}(x_2 - u) - r_{yy2}(\dot{y}_2 - \dot{v}) - r_{yx2}(\dot{x}_2 - \dot{u}),
\end{aligned} \tag{18}
$$

其中

$$k_{11}=3\,EI\frac{l(a^2+b^2-ab)}{a^3b^3},$$

$$k_{12}=k_{21}=3\,EI\frac{l(b-a)}{a^2b^2},$$

$$k_{22}=3\,EI\frac{l}{ab}.$$

由图 9-2-2 可以看出存在下列几何关系：

$$\begin{cases}x_0=x_1+a\beta,\\ y_0=y_1-a\alpha.\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}x_2=x_1+l\beta,\\ y_2=y_1-l\alpha.\end{cases} \tag{20}$$

将(19)、(20)式代入(11)到(18)式，便得由 8 个变量(x_G，y_G，θ_x，θ_y，x，y，α，β)来表示的运动方程式。

对上述三种振动模型的运动微分方程，均可解出它的频率响应函数

例如国外某 35 万千瓦发电机转子及其轴承参数如表 9-2-1 所示。

根据表中提供的参数，对于模型 2，若激励为轴承的水平加速度 $\ddot{v}$，响应为转子重心相对于支承点的 y 向位移 δ_{yG}，则可算得频率响应函数模的平方值$|H_{\delta yG}|^2$，如图 9-2-3 所示。图中各条曲线是以转子的刚度系数为参数绘出的。

2．激励的地震谱

许多国家对地震谱都有所收集和研究，由于地震谱因地震激励的非平稳特征而有差异，工程上只能选用某年、某月、某地一个有代表性的地震谱作为激励谱，这里设地震对轴承的激励仅考虑水平方向的加速度 $\ddot{v}$，而忽略铅垂方向的加速度激励 $\ddot{u}$。$\ddot{v}$ 的自功率谱密度函数为

$$W_{\ddot{v}\ddot{v}}(f)=\frac{cf^2}{(a+f^4)(b+f^2)}\quad(0<f<\infty), \tag{21}$$

表 9-2-1　发电机轴系参数值

$l=9.28\times10^2$ cm	$k_{yy}=5.9\times10^5$ kgf/cm
$a=4.32\times10^2$ cm	$k_{xy1}=1.31\times10^6$ kgf/cm
$b=4.74\times10^2$ cm	$k_{xy2}=1.51\times10^6$ kgf/cm
$\rho=5.84\times10^{-2}$ kgf·s²/cm²	$k_{yx1}=-5.2\times10^4$ kgf/cm
$m=2.45\times10$ kgf·s²/cm	$k_{yx2}=-2.2\times10^4$ kgf/cm
$E=2.1\times10^6$ kgf/cm²	$r_{xx1}=1.19\times10^4$ kgf·s/cm
$I=2.59\times10^6$ cm⁴	$r_{xx2}=1.40\times10^4$ kgf·s/cm
$I_p=5.02\times10$ kgf·s²	$r_{yy1}=0.29\times10^4$ kgf·s/cm
$I_r=2.51\times10$ kgf·s²	$r_{yy2}=0.32\times10^4$ kgf·s/cm
$I=3.07\times10^6$ kgf·s²·cm	$r_{xy1}=0.44\times10^4$ kgf·s/cm
$I_P=4.66\times10^4$ kgf·s²cm	$r_{xy2}=0.51\times10^4$ kgf·s/cm
$I_D=2.33\times10^4$ kgf·s²cm	$r_{yx1}=0.40\times10^4$ kgf·s/cm
$\Omega=3.14\times10^2$ rad/s	$r_{yx2}=0.47\times10^4$ kgf·s/cm
$k_{xx1}=1.91\times10^6$ kgf/cm	
$k_{xx2}=2.31\times10^6$ kgf/cm	
$k_{yy}=6.0\times10^5$ kgf/cm	

式中　$a_1=208.5$(1/秒⁴)，

$b=4$(1/秒²)，

$c=1.92\times10^6(g^2/秒^3)$.

这些数值是根据最大谱密度处的频率应等于常见的地震输入的主要频率这一条件确定的。由(21)式可见，在低频段，$W_{\ddot{u}g}(f)$与频率的平方成比例，而在高频段则与频率的四次方成反比例。自谱的谱峰发生在频率 $f=2.62$ 赫处，$W_{\ddot{u}g}(f)_{max}=4.75\times10^3(g^2\cdot$秒)，从该图还可以算得激励加速度的均方根值

$$\sqrt{E[\ddot{v}]^2}=\sqrt{\int_0^\infty W_{\ddot{v}\ddot{v}}(f)df}=196(g).$$

3．计算系统的响应

应用随机振动理论，由激励谱和系统的动态特性即可求得响应的自谱，进行积分求得均方根值。对上述发电机转子，计算得到的三种响应均方根值如表9-2-2所示。

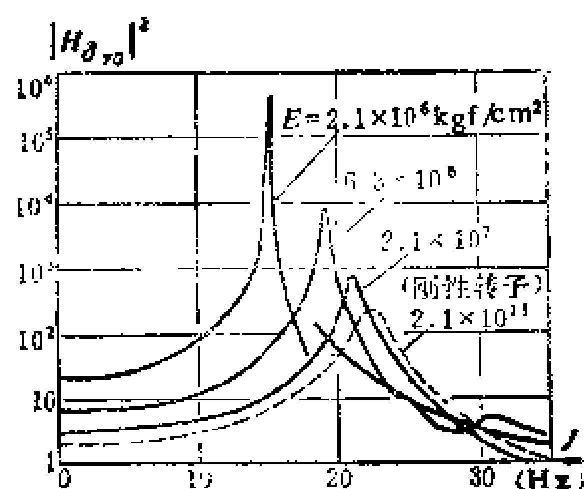


图 9-2-3

由表9-2-2可见，模型2和模型3的加速度及轴承载荷都比模型1的要大得多。因此，在计算这些响应时必须计及转子弹性的影响，而计算相对位移时既可以采用刚体转子的模型，也可

表 9-2-2　地震响应均方根值

	模型 1	模型 2	模型 3
$\sqrt{\ddot{x}_G^2}$(g)	10.7	121.9	203.5
$\sqrt{\ddot{y}_G^2}$(g)	39.6	169.1	279.3
$\sqrt{F_{xt}^2}$(kgf)	282	2287	2542
$\sqrt{F_{yt}^2}$(kgf)	1519	3335	3493
$\sqrt{\delta_{xG}^2}$(cm)	1.39×10^{-3}	1.35×10^{-2}	1.97×10^{-2}
$\sqrt{\delta_{yG}^2}$(cm)	2.35×10^{-3}	1.92×10^{-2}	2.71×10^{-2}

$\sqrt{\ddot{x}_G^2}$, $\sqrt{\ddot{y}_G^2}$ =分别为重心在 x 方向和 y 方向加速度的均方根值

$\sqrt{F_{xt}^2}$, $\sqrt{F_{yt}^2}$ =轴承载荷的均方根值

$\sqrt{\delta_{xG}^2}$, $\sqrt{\delta_{yG}^2}$ =重心相对位移的均方根值

以采用弹性转子的模型。此外，集中质量模型的响应要比相应的分布参数模型的响应大。一般说来，由于轴承的刚度系数和阻尼系数的差别，y 方向的水平响应远比 x 方向的垂直响应来得大。

综上所述，可以得到以下几点：

（1）由图 9-2-3 可见，随着转子的变硬，共振频率降低，共振峰值则大大增加。该发电机转子的共振频率约为 15 赫，而相应的刚性转子的共振频率约为 22 赫。

（2）虽然发电机在实际运行中转速固定在 3000 转/分，但转速或陀螺力矩对地震响应的影响作为旋转机械的动力学问题还是值得注意的。图9-2-4表示了轴承载荷与加速度输入之间的频率响应函数模的平方值。当转速增大时，峰值和共振频率只有少许增加，因而可以假定陀螺效应使得转子刚度增大

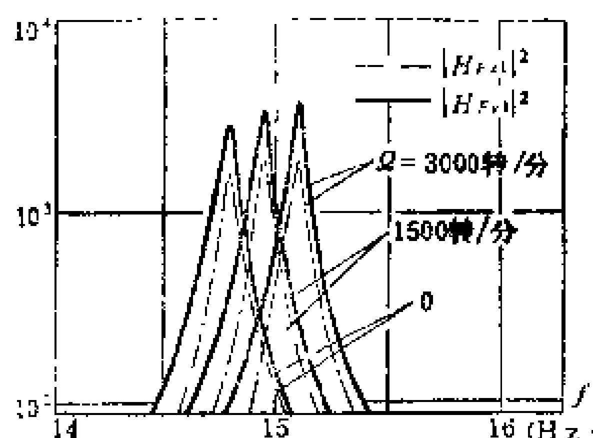


图 9-2-4

（3）以上分析处理方法可推广到多跨的弹性转子的情况。这时候转子的每一部分都用等价的具有均匀分布参数的转子来代替，并且采用传递矩阵的方法。

（4）为了证实分析结果的合理性，可以用小模型进行实验。模型为带一个集中质量（圆盘）的弹性转子，实验装置简图如图9-2-5 所示。由于轴承的刚度是用四根弹簧来模拟的，因此与该实验相对应的分析结果也应考虑放在这样的轴承上的集中质量。转子的支座同振动试验机的台面相连，支座在水平方向受到各种频率正弦波的激励。转子由一台电动机通过万向联轴节驱动。轴承载荷由装在弹簧下的载荷传感器测出。

图 9-2-6 画出的是轴承载荷与激励频率的关系曲线。图中

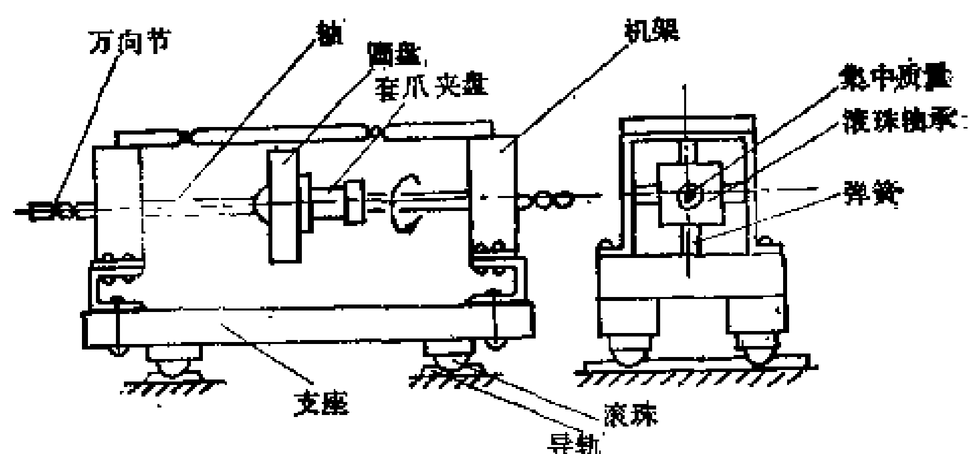


图 9-2-5

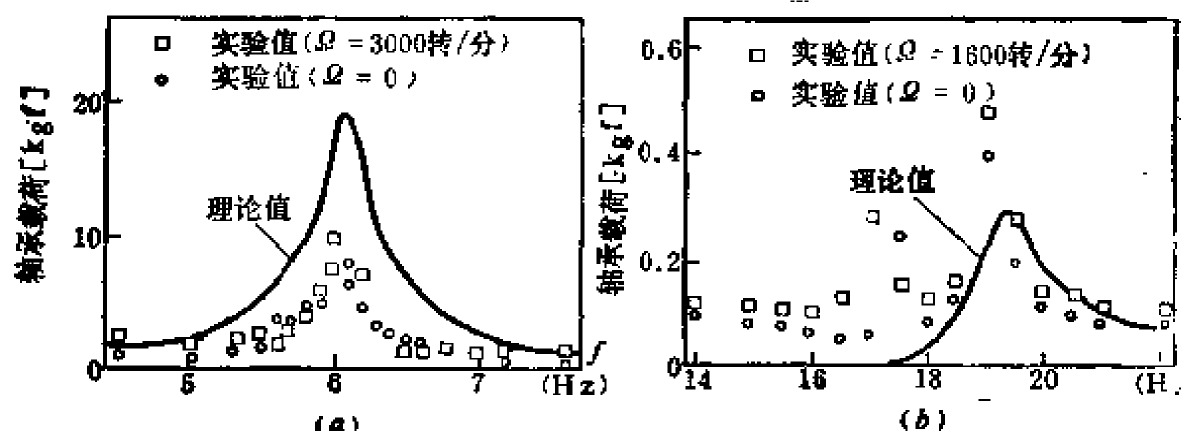


图 9-2-6

(a) 为平动模态(输入加速度为 50 g)，(b) 为基本弯曲模态(输入加速度为 250 g)。实验模型的参数值在表 9-2-3 中列出。

在这一模型中，由转速不同而引起的差别是很小的，可以忽略不计。理论和实验响应值之间的差别是由于阻尼比不同引起的。

实例 3 机关枪(或炮)射击时弹着点的随机偏移

某自动机关枪连续射击 30 发子弹，在这一连续射击过程中，用传感器在灵敏点测量竖直方向的加速度，经信号积分仪输出，得枪座竖直方向的速度信号，如图 9-3-1 所示。又将此速度时间历程信号的磁带通入信号处理机处理，可得各域信息，图 9-3-2

表 9-2-3 实验模型的参考值

$m=3.14\times10^{-3}$ kgf·s²/cm	$k_{xx1}=4.89$ kgf/cm
$m_{b1}=1.11\times10^{-3}$kgf·s²/cm	$k_{xx2}=4.89$ kgf/cm
$m_{b2}=1.10\times10^{-3}$kgf·s²/cm	$k_{yy1}=4.89$ kgf/cm
$E=2.1\times10^{6}$ kgf/cm²	$k_{yy2}=4.89$ kgf/cm
$J=3.22\times10^{-2}$ cm⁴	$r_{xx1}=7.57\times10^{-3}$ kgf·s/cm
$I_D=2.23\times10^{-2}$ kgf·s²·cm	$r_{xx2}=7.57\times10^{-3}$ kgf·s/cm
$I_p=4.37\times10^{-2}$ kgf·s²·cm	$r_{yy1}=8.52\times10^{-3}$ kgf·s/cm
$l=60$cm	$r_{yy2}=8.52\times10^{-3}$ kgf·s/cm

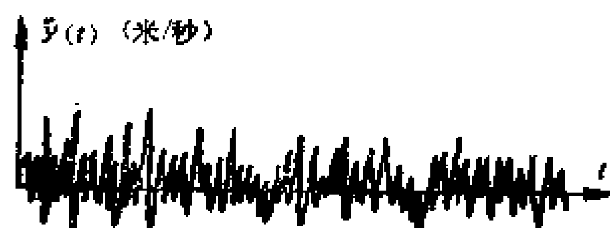


图 9-3-1

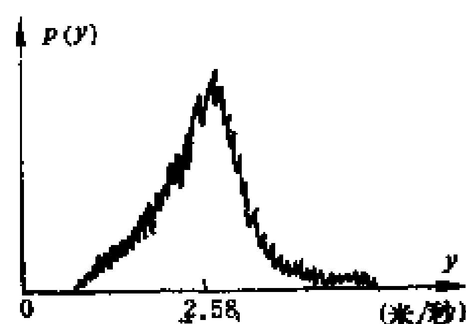


图 9-3-2

为速度响应的概率密度函数。此幅域信息说明自动枪炮类射击时，由于枪口的出口速度、初始角都有随机性，所以弹着点必然是分散的，即存在着随机偏移。下面分析产生这种随机偏移的原因并用概率的方法加以描述。

1. 偏移原因

机枪对不同目标射击时，如果目标位置认为是测准的，气象及其它条件也是良好的，子弹出现随机偏移现象。主要原因是由于射击装置的振动，这样弹头出口速度的大小和方向均有随机改变，使弹头的实际弹道与理想弹道不相符合，这样弹着点就偏离了瞄准点，这种现象称为射击的"散布"。

2. 描述方法

(1) 平面散布

枪炮单次射击时，弹着点对于目标的随机偏离可用两个随机变量 X 和 Y 描述。X 和 Y 分别表示弹着点的横坐标和纵坐标。这种情况叫做平面散布。

表征枪炮弹着点(爆炸点)随机变量的分布规律，称为散布律。散布律就是弹着点两个坐标 X 和 Y 的分布律，通常若已知它的概率密度函数 $p(x, y)$，则 $p(x, y)dxdy$ 就是弹丸落在坐标点 (x, y) 附近一块面积 $dxdy$ 内的概率，如图 9-3-4 所示。

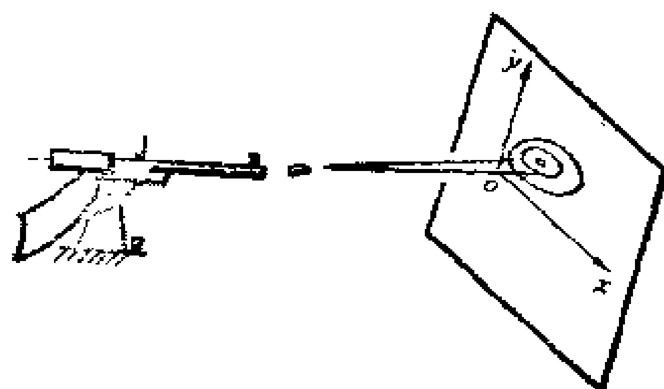


图 9-3-3

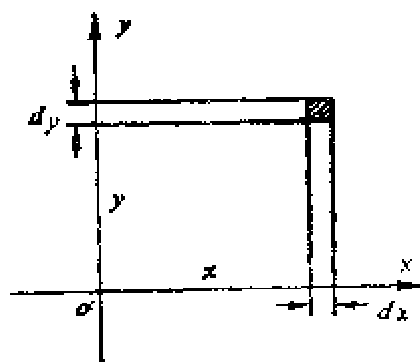


图 9-3-4

如果枪或炮在相同条件下进行多次射击，则散布现象表现为多发弹丸的弹着点不重合，是分散的。

当发射次数增多时，这种散布现象开始出现一定的规律，即弹着点实际位置偏离程度将反映弹头的散布律，且发射次数越多，此散布律越接近于一确定的规律。

(2) 正态散布律

对单发射击来说，弹着点的分布律与 $p(x, y)$ 有关，而 $p(x, y)$ 与射击条件(射程、射速、射向、振动程度等)有关。对各种类型的射击，常用正态分布表示散布律，这是因为每一坐标的射击误差都可表示为大量的各单个因素所引起的基本误差之和，而且认为 x 方向和 y 方向的散布是相互独立的，因此有

$$p(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

式中(m_x, m_y)为散布中心，

σ_x，σ_y 为沿 Ox，Oy 轴的标准离差。

(3) 连续射击的散布律

设一次试验中包含着 n 次连续射击，则散布律就是下列 $2n$ 个随机变量所组成的 n 维随机变量的分布律：

$$(X_1, Y_1; X_2, Y_2; \cdots; X_n, Y_n),$$

式中 X_i，Y_i 为第 i 次射击的弹着点坐标$(i=1, 2, \cdots, n)$。

选择坐标轴时，如果使它近似地平行于每次射击的主散布轴，那么就可以认为每个弹着点的横坐标 X 与纵坐标 Y 是互相独立的。至于同名坐标(X_i 和 X_j，Y_i 和 Y_j)，则在一般情况下是相关的。产生这种相关的原因是各次射击具有相同条件的随机误差(如测量不准引起的误差对各发弹着点都有影响)。

(4) 射击相关性的一般情况

现在用机关枪对水平目标进行短促的连射，每次连射中射击五发子弹。整理实验数据，得出弹着点横坐标和纵坐标的相关矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & -0.2 \\ & 1 & 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ & & 1 & 0.8 & 0.8 \\ & & & 1 & 0.6 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & -0.1 & -0.5 \\ & 1 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ & & 1 & 0.8 & 0.1 \\ & & & 1 & 0.6 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

上述矩阵的每一个元素分别为 $\rho_{x_ix_j}$ 和 $\rho_{y_iy_j}$ $(i, j=1, 2, 3, 4, 5)$，因为是对称阵，只写出了一半的元素。对上述每一矩阵各元素的平方取平均值，即可得出相关系数

$$\rho_x=\sqrt{\frac{0.9^2+0.8^2+0.6^2+(-0.2)^2+0.9^2+0.7^2+0.4^2+0.8^2+0.8^2+0.6^2}{10}}$$

$$=0.704.$$

类似方法算出

$$\rho_y=0.551.$$

实际中由于这两个系数常常没有多大差别，所以再取几何平均，即

$$\rho=\sqrt{\rho_x\cdot\rho_y}\doteq 0.62\ .$$

实践证明，枪座振动情况与ρ密切有关，因而也影响到机枪射击的命中率。

实例 4　频域分析法在工程中的应用

频域分析是指在频率域内分析系统的动态特性以及激励和响应随机过程的统计特性，它是解决许多工程振动问题的重要一环。因为通过它不仅可以得到许多频域信息，而且进行变换后，还可直接或间接地得到其它各域信息。

要进行动态测试与分析，首先要选用合适的(指品种，量程，截止频率、频率响应，尺寸与自重等)传感器，布置在灵敏点上或感兴趣的点上，然后开机或并运行中采集信号；对信号要选择能匹配的放大器进行合理的放大；经放大后的信号在实时信号分析仪上分析或用磁带记录仪录制储存；经分析和录制后的信号再在信号处理机上处理与运算，从而获得频域信息及其它各域信息；最后把这些信息在记录仪上用数字储存或用图象显示并描绘下来。

图 9-4-1 表示纯氧顶吹柔性传动转炉的测试框图。目的是对于不同直径的扭力杆和炉内不同重量的铁砂，获得系统 1—3 阶

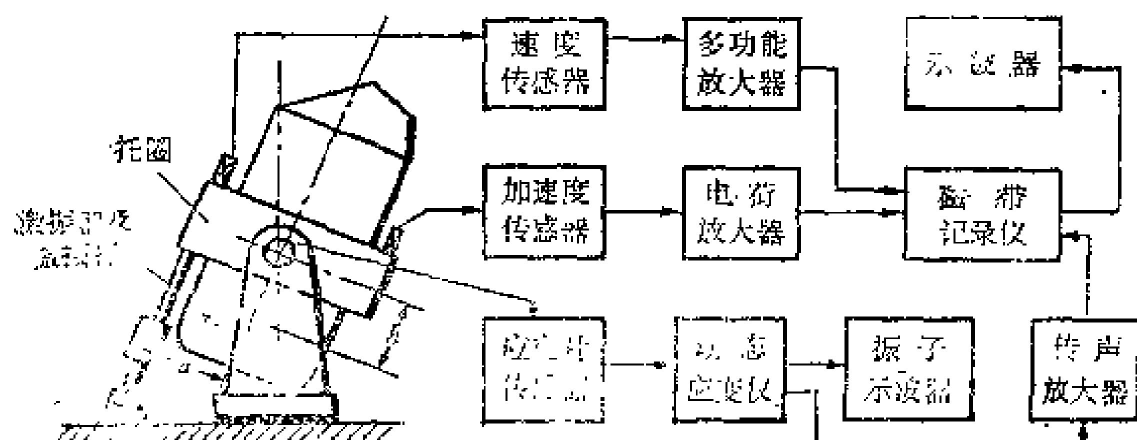


图 9-4-1

的扭振固有频率，并对转炉起动、制动和模拟顶渣等工况的振动响应进行频谱分析，为建立整个机构的计算模型提供实验依据。采用激振器进行正弦激振，激振点选在炉子的托圈上。由于估计转炉的固有频率较低，因此激振器与地面采用刚性联接。在托圈上设置加速度传感器和速度传感器；在耳轴和扭力杆上设置应变片传感器。当用工况作为激振实测时，振动响应的测点不变，仅将激振器去掉，同时在电机主回路中串联0.4欧电阻，将电阻上的电流信号作为输入信号，接入磁带机。

图9-4-2表示转炉扭力杆的自谱，其纵坐标为自功率谱密度的开方值。由于实际结构大多是小阻尼系统，因而谱图上各峰点处频率值也可以代表结构的各阶固有频率，当然要十分注意其它干扰信号的假频率去混淆系统固有频率的尖峰。由图可见，振动响应的主要能量集中在35赫以下的低频区，因此，对转炉设计仅需注意低阶模态，即一阶到三阶振型，这样，有助于在满足精度要求的前提下，减少分析、计算的工作量。

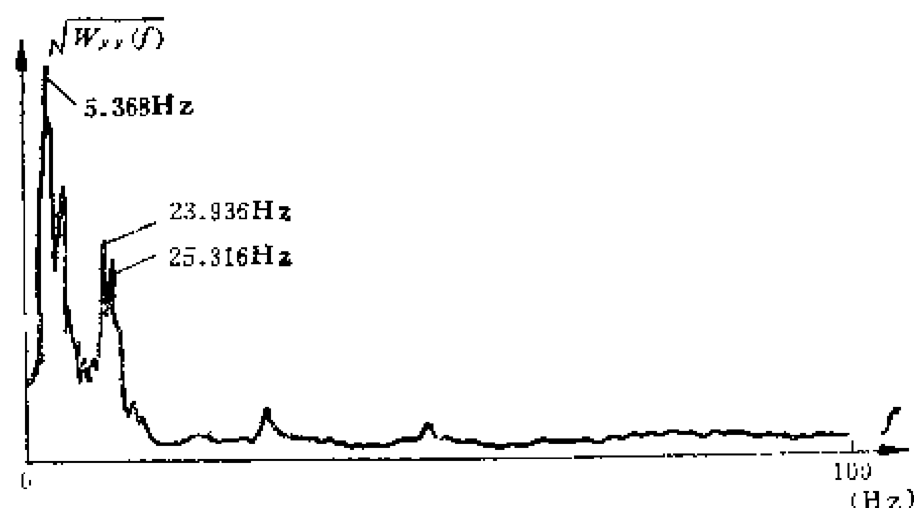


图 9-4-2

对于从频谱分析获得的信息，还可举例如下：

1）图9-4-3表示各种环境谱，它是研究飞机、导弹、舰船、道路、房屋、大型结构物、车辆等振动时的激励自功率谱密度，从这些图谱上，可清楚地知道激励的频率结构及总能量。

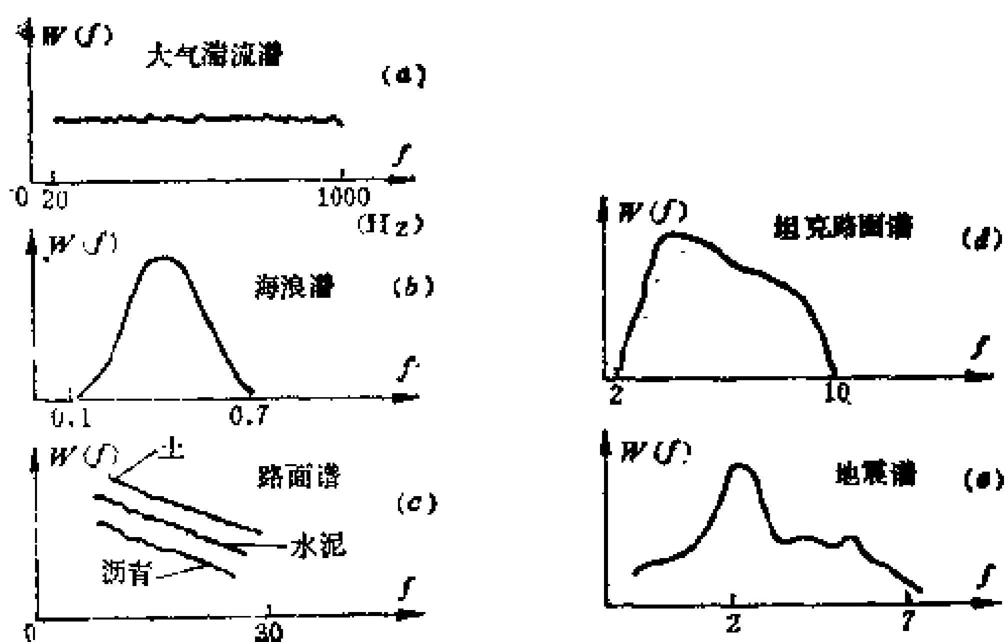


图 9-4-3

(2) 图 9-4-4 表示东风-50 拖拉机耕地时驱动轴扭矩的频率结构，它的主要能量集中在 20 赫以下。在柏油路运输时前桥垂直弯矩从 1.6 至 6 赫集中了大部分能量，都具有低频结构。

(3) 图 9-4-5 所示的东风-50 拖拉机乘座垂直加速度响应的自功率谱密度，可作为评定乘座平顺性的信息。由图可见，土路运输时在 4—8 赫范围内有较大的能量，因而乘座对人体的胃损

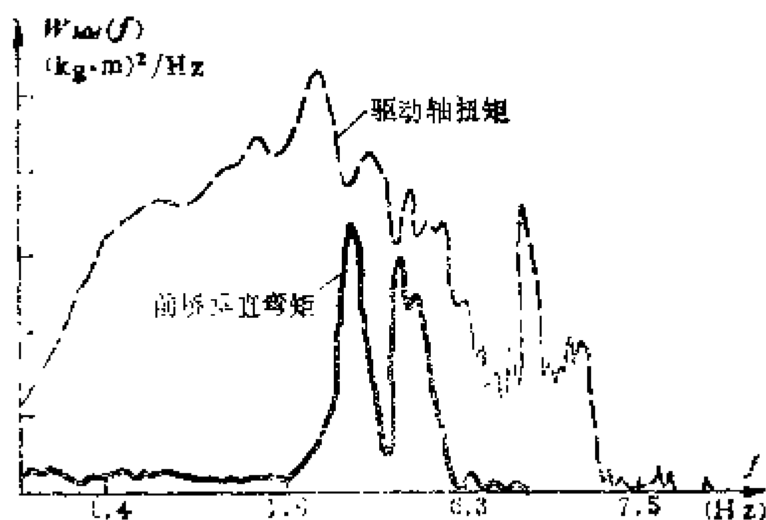


图 9-4-4

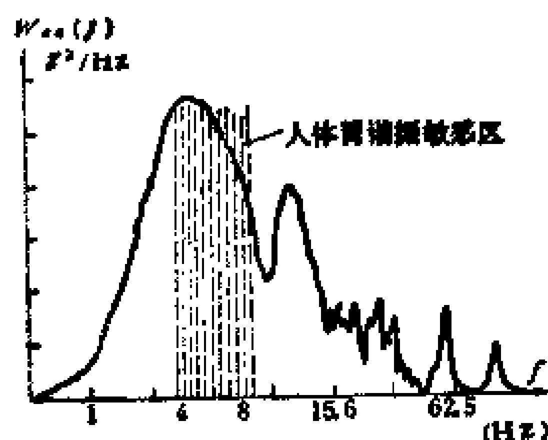


图 9-4-5

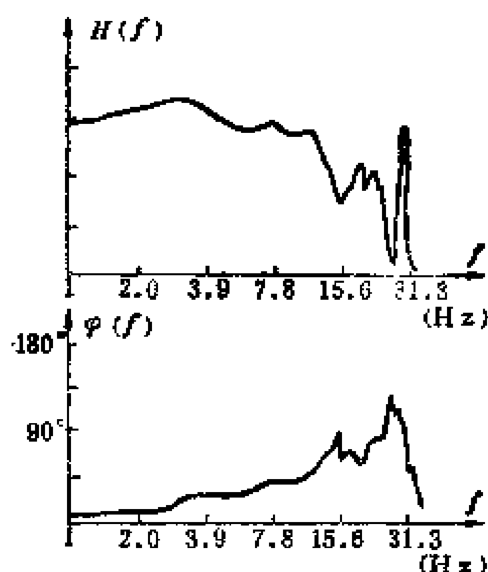


图 9-4-6

伤较大。

（4）图 9-4-6 给出了东风-50 拖拉机后桥与座位系统的频率响应函数图，可以看出座位的振动相对于后桥有一个滞后角，4 赫以下振幅略有放大，4 赫以上则有不同程度的衰减。表明这种座位主要是改变振动响应的频率结构，而不在于吸收能量。

（5）图 9-4-7 表示东风-50 拖拉机后桥与后座的凝聚函数，

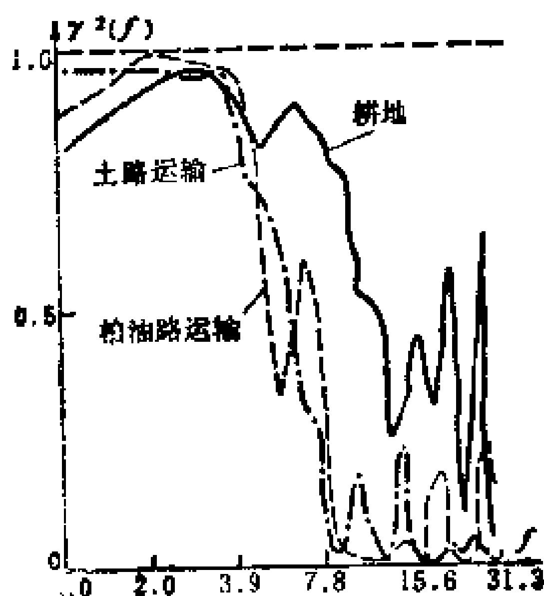


图 9-4-7

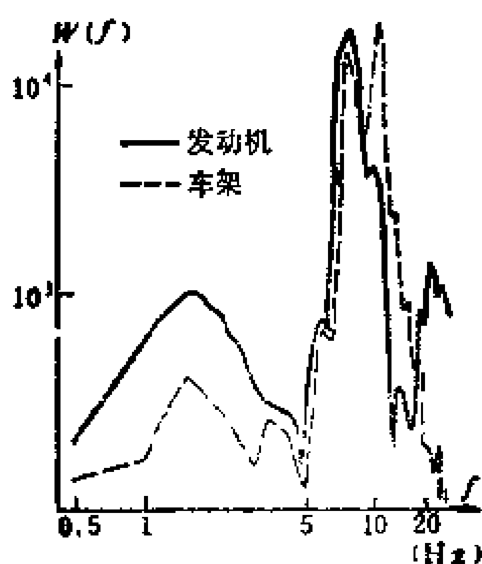


图 9-4-8

若认为$\gamma^2(f)$在0.75以上是凝聚的，则凝聚范围是：耕地时在10赫以下，运输时在5.5赫以下，这表明低频区座位振动主要来自后桥，而在高频区两者关系不太大，即座位振动还与前桥等其它部件振动有关。

(6) 根据日本五十铃汽车公司对汽车发动机支架频率特性的观察，当输入是车架的垂直加速度$\ddot{x}$，输出是发动机的垂直加速度$\ddot{z}$时，其自谱$W_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)$和$W_{\ddot{z}\ddot{z}}(f)$表示在图9-4-8上，由此进一步得出$|H_{\ddot{x}\ddot{z}}(f)|$、$\phi_{\ddot{x}\ddot{z}}(f)$及$\gamma^2_{\ddot{x}\ddot{z}}(f)$曲线，如图9-4-9所示，可见在11.5赫附近有$|H_{\ddot{x}\ddot{z}}(f)|$的峰值，在它附近，位相作了180°的偏转。从超过12赫附近开始，凝聚急剧下降，输出受其它干扰的支配。

(7) 对于图9-4-10(a)所示的大跨度吊桥，可利用风的自然激励在桥的1，2，…，9各点上录取信号，进行频谱分析。得测点5与8的幅频与相频图，如图9-4-10(b)所示。在幅频图上有四个峰值。(分别对应于0.185，0.245，0.395，0.530赫)，峰值处的频率即为各阶固有频率。对照相频图，可以判断点5与点8之间是同相还是反相，这样就可以画出前四阶模态图

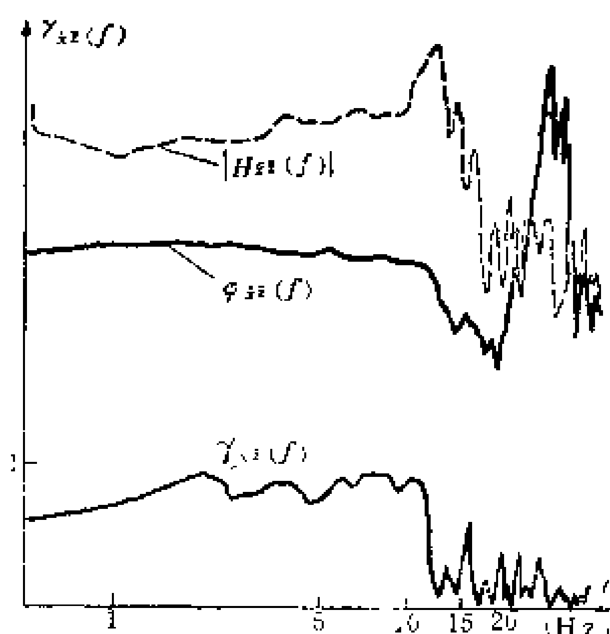


图 9-4-9

另外，烟囱、超高层建筑、原子能反应堆管束、火箭发射架、大型变压器等均可用同样方法，得到模态图。

实例 E 相关分析在工程中的应用

相关函数在工程中得到了广泛的应用，下面列举几种应用实例。

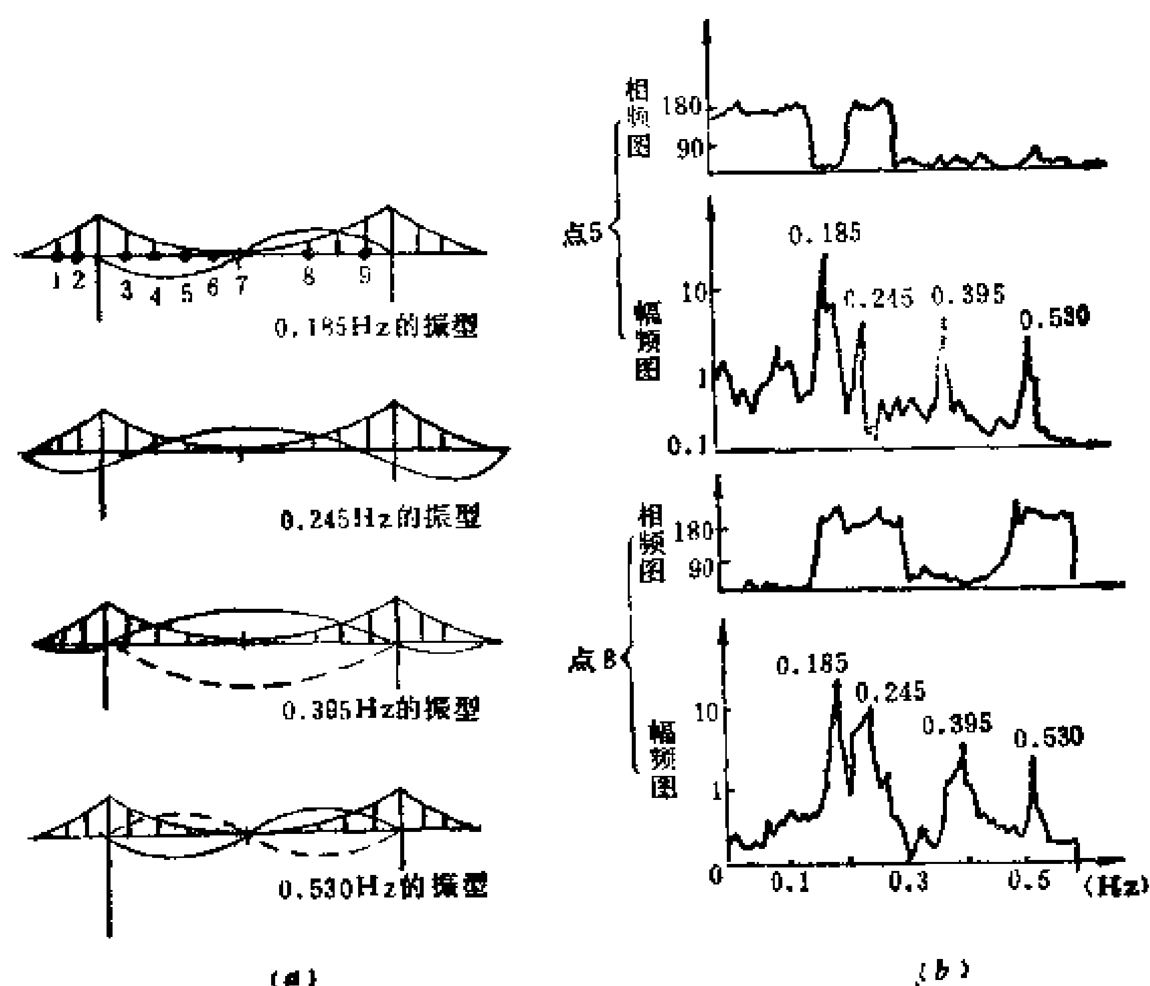


图 9-4-10

1．用自相关函数检测随机信号中有否混入周期信息

各类运载装置如汽车、拖拉机、坦克、飞机，舰船等座椅发生的振动，一般由两个振源所激发，一个是发动机的周期性激励；另一个是环境（指路面、大气湍流、海浪、噪声等）对装置的随机激励。若周期性激励引起座椅的不舒适性是主要因素，就特别需要在发动机与机架连接处安装减振器进行隔振，或在座椅上采用减振措施（如用软弹簧垫、泡沫塑料垫等），各种措施的效果要通过测试鉴定。测试时，只要在座椅上装一只传感器（见图 9-5-1），在某种环境实地将测试讯号用磁带记录，经过信号处理机快速处理，得到自相关函数图（见图 9-5-2），应用自相关函数的

性质(周期信号的自相关函数还是周期性的，且两者周期相同;随机信号的自相关函数当$\tau\to\infty$时，$\phi_{xx}(\infty)\to m_x^2$)，可以判别座椅上有否周期信息。如果减振后，座椅的振动讯号已几乎不包含与发动机周期性激励有关的信号，则认为座椅的振动已排除了周期性激励的影响。

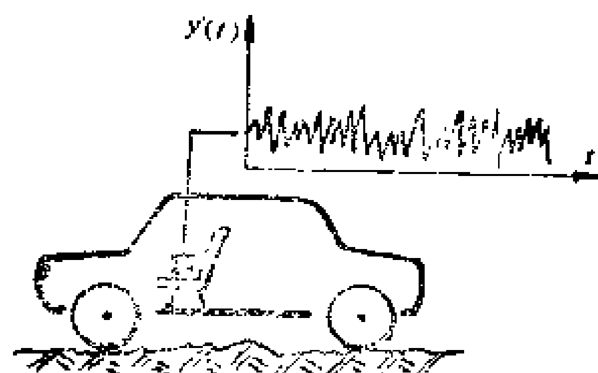


图 9-5-1

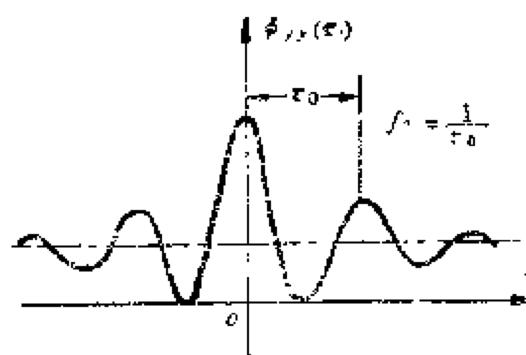


图 9-5-2

2. 用互相关函数测量滞后时间

互相关函数的峰值应出现在两随机信号最相似的时候，这一性质的应用如下：

a 较准确地确定深埋在地下的输油管裂缝位置，以便开掘后进行维修。

图 9-5-3(a)上油管漏损处K可视为声源，它向两测传播信号，在第一次开掘处A未找到漏损点，即在管道上固结一只传感器，若在第二次开掘处B也未找到漏损点，则再在管道上固结一只传感器。为了第三次开掘一定要找到漏损点，可将A、B两只传感器接收到的由声源K发出的信号进行放大后，经信号处理机得到它们的互相关函数图，见图 9-5-3(b)。从图上可见，$x_1(t)$与$x_2(t)$两信号的时差为τ_m，假定漏损点被流动的油擦过发出的异常声波沿管道的传播速度为v(常数)，两传感器中点与漏损处的距离为s，则有

$$l_1=vt_1, \quad (1)$$

$$l_2=vt_2, \quad (2)$$

且 $$l_2 - l_1 = 2s, \tag{3}$$
将(1)、(2)式代入(3)式，得

$$2s = v(t_2 - t_1) = v\tau_m,$$

从而得到

$$s = \frac{1}{2}v\tau_m. \tag{4}$$

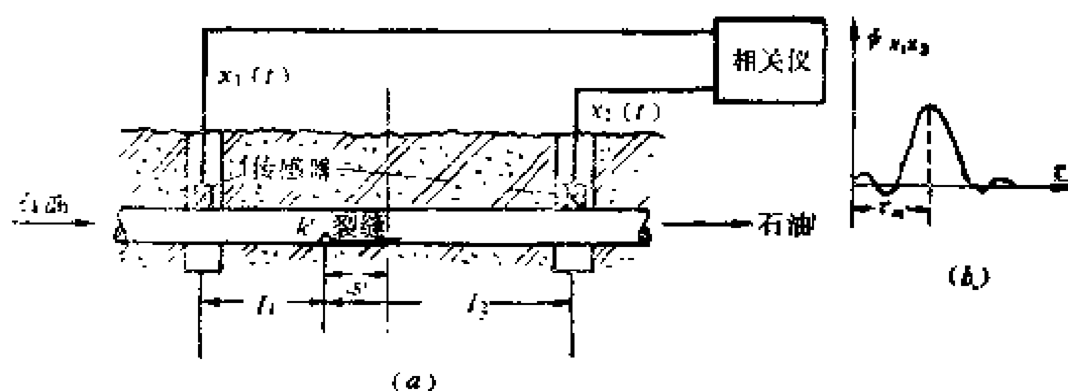


图 9-5-3

应用上述方法确定深埋管道漏损位置的误差约为几十厘米，因而深受工程技术界的欢迎，此方法也适用于海底石油管道和深埋的天然气管道的故障检查，

(b) 确定操纵机构（转向系统，升降舵，开关，闸门刹车系统，旋扭等）的灵敏度

图 9-5-4 (a)所示车辆的转向机构中，若以方向盘的转角 $\theta(t)$ 为输入、前桥转向角 $\varphi(t)$ 为输出，则从互相关函数 $\phi_{\theta\varphi}(\tau)$

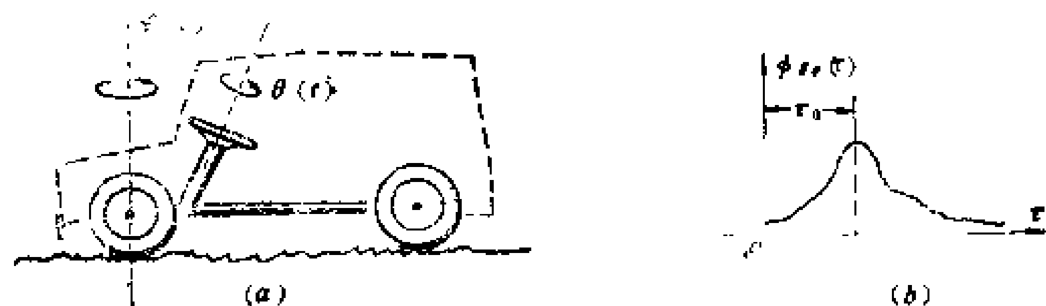


图 9-5-4

（见图 9-5-4（b）），的峰值，可知滞后时间 τ_0，τ_0 越小表示操纵机构接受指令后到执行的时间间隔越短，机构的灵敏度越高。所以说，互相关函数图可以提供评价操纵机构灵敏度的重要信息。

(c)测定速度。

图 9-5-5（a）所示为测定运动物体（船，汽车或风洞内流体等）速度的方法，在相距 $l=95$毫米处设置两个光电信号发射与捡拾器，运动物通过时，先后从两个光电捡拾器获得信号，作出此两信号的互相关函数图（见图 9-5-5（b）），从图上量得第一个峰值的时间移动值为9.5毫秒。显然，运动物行驶速度越大，两光电信号最相似的时间位移（即滞后时间）就越小。所以运动物的速度为

$$v=\frac{95\ (\text{毫米})}{9.5(\text{毫秒})}=10\text{米/秒}.$$

(d)资源勘探。

图 9-5-6 所示为地层剖面，在地面上由强大振源 A 发出的

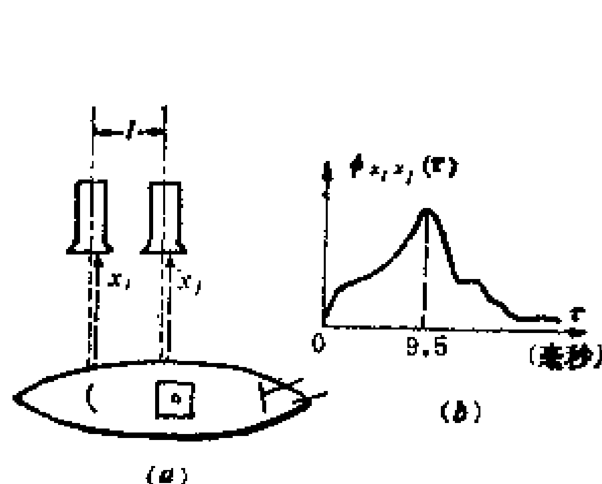
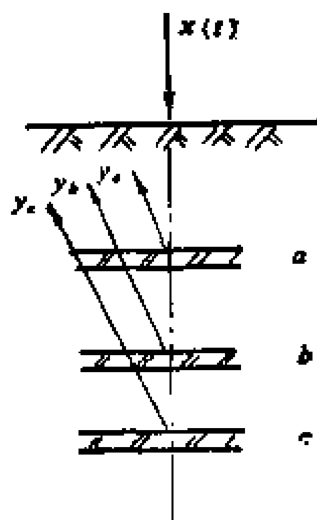


图 9-5-5



例题图 9-5-6

信号经矿层 a,b,c 反射后，又被设置在地面的传感器接收，作出 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$ 图，从峰值出现的时间可知矿层的深度。

(e)提高远程导弹的命中率。

预先录制欲击中目标处的信息$x(t)$，储存在导弹的头部。在导弹飞行过程中，不断地将前方接受到的信息$y(t)$与$x(t)$作比较，当$y(t)$变化到使互相关系数

$$\rho_{xy}(\tau)=\frac{\varphi_{xy}(\tau)-m_x m_y}{\sigma_x\sigma_y}\doteq 1$$

时，进行攻击，则命中率最高。上式中，m_x，m_y，σ_x，σ_y 分别为$x(t)$，$y(t)$的均值和方差。

3.用互相关函数寻找主要振源，确定转递通道

(a)分析、寻找几台运行的机器中对地面振动影响最大的机器。在两台机器和地面上分别装上传感器，它们接收到的信号分别为$x_1(t)$、$x_2(t)$和$y(t)$。图 9-5-7(b)、(c)分别表示$x_1(t)$和

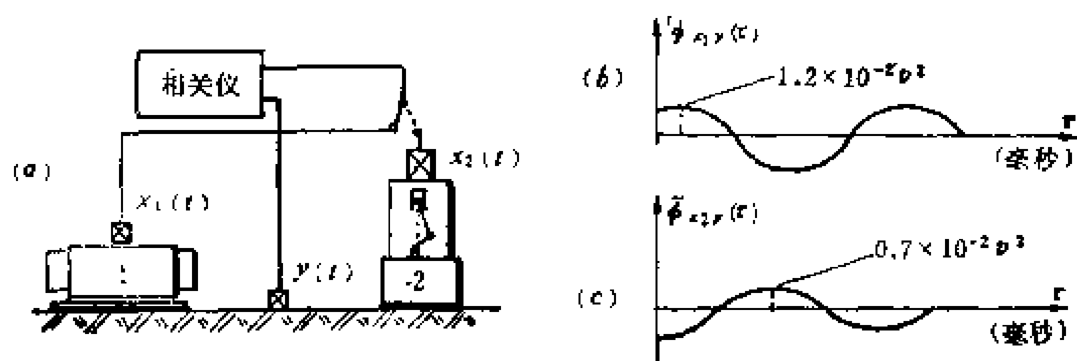


图 9-5-7

$y(t)$及$x_2(t)$和$y(t)$的互相关函数图。比较两图，可见机器 1 对地面测点振动影响的程度为

$$\frac{1.2}{1.2+0.7}=63\%,$$

机器 2 为

$$\frac{0.7}{1.2+0.7}=37\%\,\cdot$$

(b)前面提到过的车辆座椅振动，若从自相关函数发现座椅振动中还包含与发动机周期性激励有关的信号，则可进一步确定发动机对座椅振动的影响程度，应用图 9-5-8(a)的测量装置，得到发动机与座椅的互相关及轮轴与座椅的互相关(见图 9-5-8

(b)、(c)),比较后发现，此时座椅的振动主要是由路面引起的轮轴振动激发的，而发动机的振动处于次要的地位。

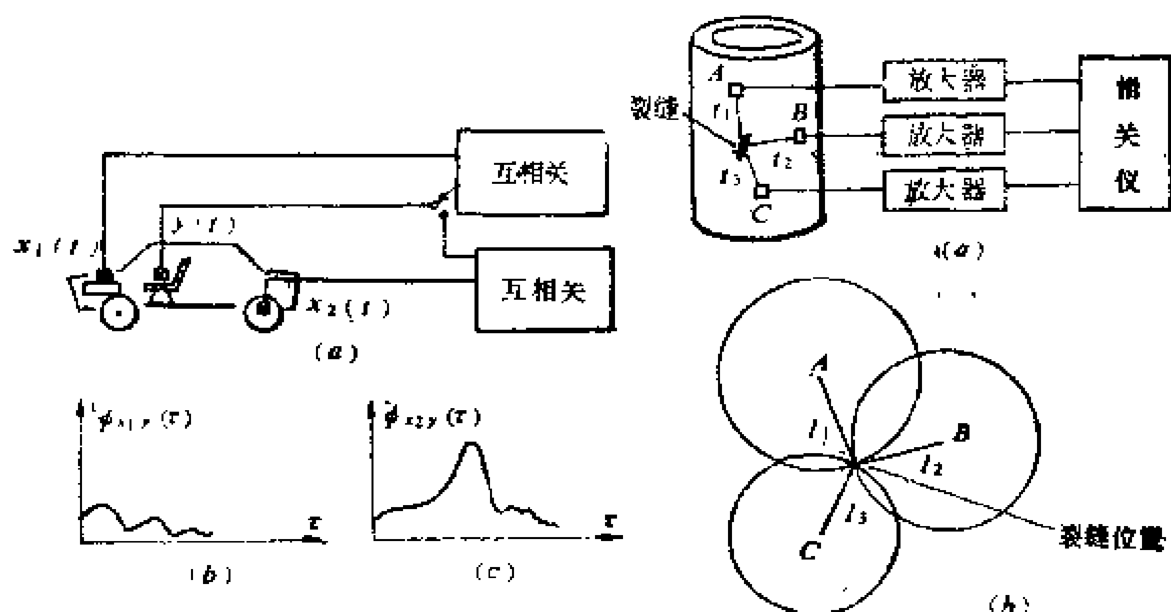


图 9-5-8　　　　图 9-5-9

(c)高压容器细微裂纹部位的确定。

在容器外壁任选三个不在同一直线上的测点 A、B、C，以接收从裂缝处发出的随机噪声讯号——蜂鸣音，见图 9-5-9(a)。这些讯号被放大后，通过相关分析，可测定噪声传到各测点所需的时间 t_1、t_2和t_3，根据噪声在容器中的传播速度，算出裂缝与各测点的距离l_1、l_2和l_3，再通过交切作图法，确定裂缝位置（见图 9-5-9(b)），然后及时采取修补措施，预患于未然。

4．用互相关函数测定材料的隔声性能

图9-5-10(a)所示的装置中，及响室4内放有噪声声源（如发动机），a、b为噪声接收器。先在不装隔声板的情况下，将a、b处接收到的噪声信号作互相关分析，然后在装上隔声板后，作同样的分析，比较两次得到的互相关信息(见图 9-5-10(b))显见，后者的互相关峰值大大低于前者。此值越低表明材料的隔声性能越好。

实例3　机器故障诊断

机器或设备运行一段时间后，由于磨损、疲劳、锈蚀等原因，其零部件将出现故障。过去，只有在机器不能正常工作或者拆开检查时，才知道故障已经发生了；而损坏后，又常因未能确切诊断"病因"，只能用尝试法检修，致使检修期延长。由于意外停机和检修期停机所造成的经济损失往往是巨大的。为此，不得不规定定期维修检查制度，或设置备用机器，以确保机器的正常运行。当然，这种做法既不经济也不安全，远远不能适应现代生产的需要

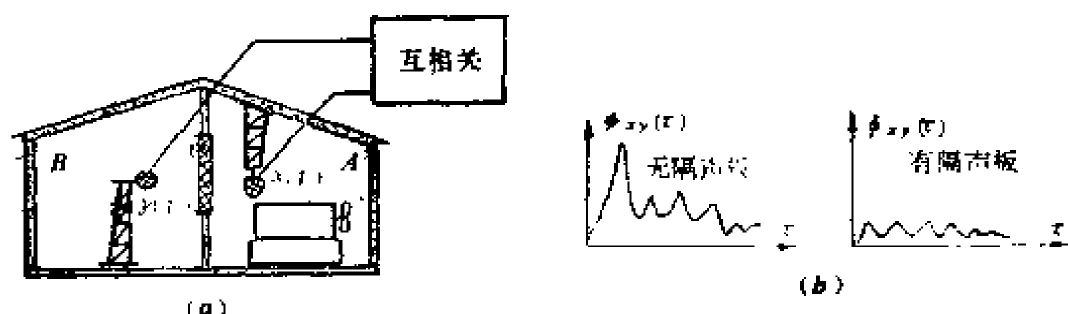


图 9-5-10

为了改变这种状况，近年来发展了机器故障诊断与预测的新技术。它可以在机器工作的情况下，对机器结构进行动态分析，利用机器外部发出的信息来诊断机器内部的状况，防患于未然。这种诊断方法不但方便易行，而且具有足够的精确性和及时性

机器在运行过程中，零部件必然受到力、热、摩擦等各种物理作用，使其运行状态不断变化。伴随着上述物理作用，必然产生相应的振动、声音、温度、应力、位移、气体泄漏以及噪声等"二次效应"，机器故障诊断即根据这些物理参数来识别机器的工作状态和故障。

在上述的"二次效应"中故障所形起的振动和噪声的变化特别明显。任何机器都以其自身可能的方式产生振动和噪声，如果机器运行时，振动和噪声增加，那么一定是由故障引起的，因为不存在无故障的声振增加。而不同故障引起的声振增加又各不相同。

因此，只要掌握机器振动与噪声的特征和变化规律，就可诊断机器的故障。应用现代信号处理技术，还可以将振动与噪声的时域信号变为其它各域信息。所以信号测试(采集)与分析(以获得诊断故障所需要的信息)是近代机器故障诊断的主要内容。

机器均由轴、轴承、齿轮、机构等组成，其各个零部件可能发生各种各样的故障，但每一种故障都有它振动或噪声的特征信息。

(1) 轴类的故障

如某轴存在静不平衡或动不平衡，则发生振动的频率f_0就是轴每秒的转数$f_0 = n/60$(赫)，式中n(转/分)为轴的转速；某轴系不对中，则发生一阶转频f_0的轴向振动(图9-6-1)和二阶转频$2f_0$的横向振动(9-6-2)。轴的弯曲会导致一阶转频f_0的轴向和横向振动以及二阶转频$2f_0$的横向振动。

上述这些振动，时间长了会引起固结件的松动，而此松动又

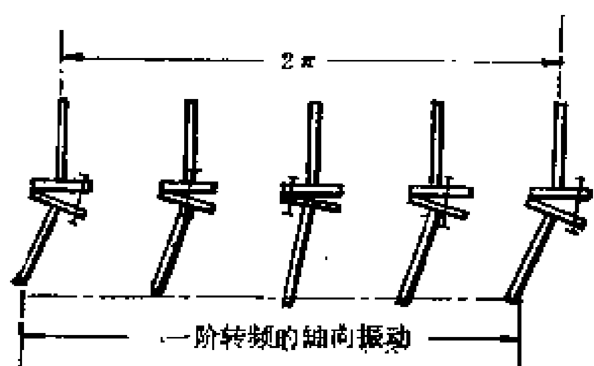


图 9-6-1

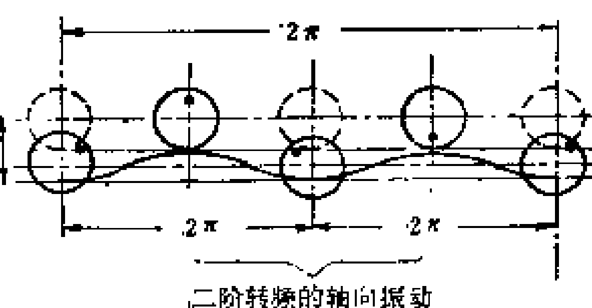


图 9-6-2

会激发二阶转频$2f_0$的横向振动。另外，二阶振动与轴本身的一阶横向振动相互调制后，还会产生三阶($3f_0$)和更高阶的谐振，如图9-6-3所示。

图 9-6-4 中 A 所示为锅炉给水泵不对中，内零件擦着时的频谱图，其特点是主要振动分量在两倍工作频率 100 赫处（工作频率为 50 赫），有时也会引起高倍频振动，如在 4 倍工作频率(398 赫)处，也有较大的分量。

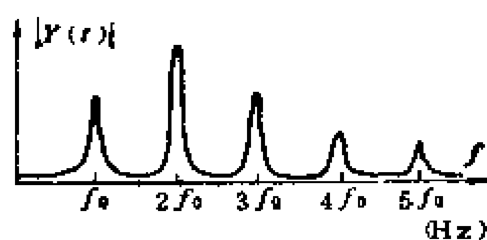


图 9-6-3

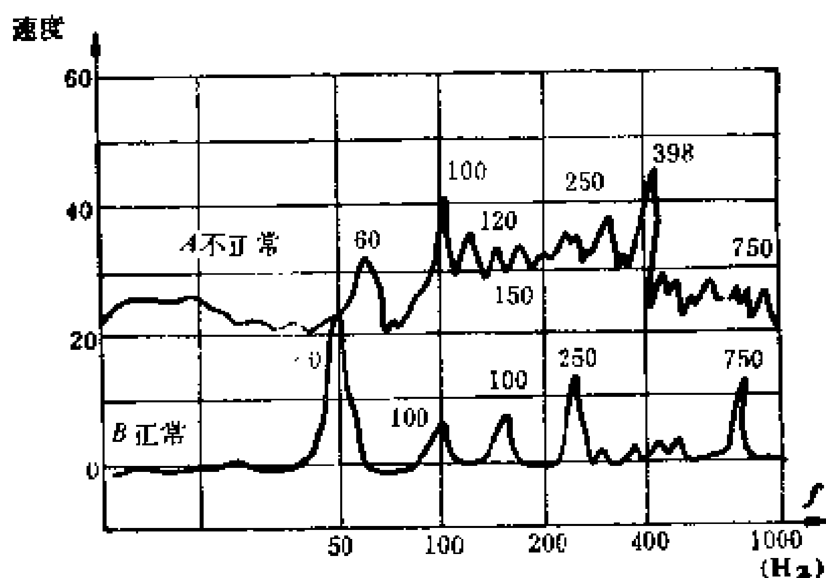


图 9-6-4

（2）滚动轴承的故障

滚动轴承的典型故障大致有疲劳剥落、疲劳点蚀、磨损、划伤、凹痕、粘附物、浮动（内圈与轴之间出现相对运动）等几种。一个轴承上可能出现一种故障或几种故障。要诊断滚珠轴承

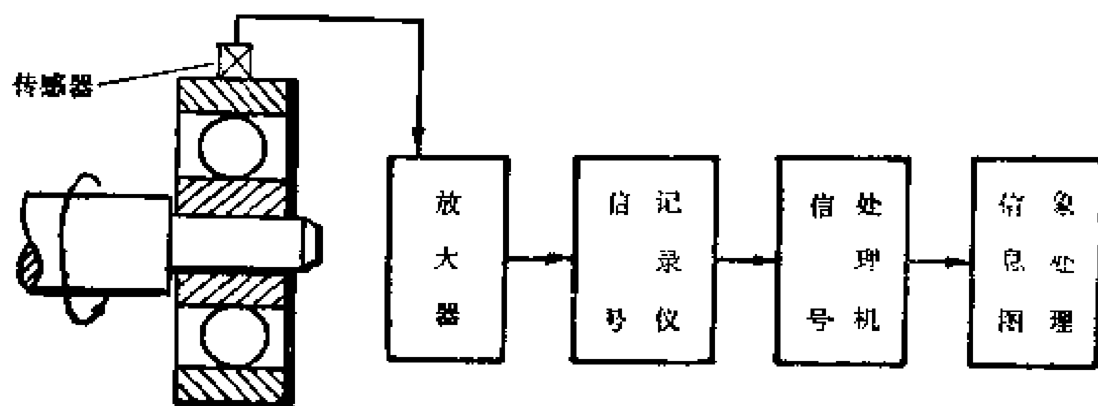


图 9-6-5

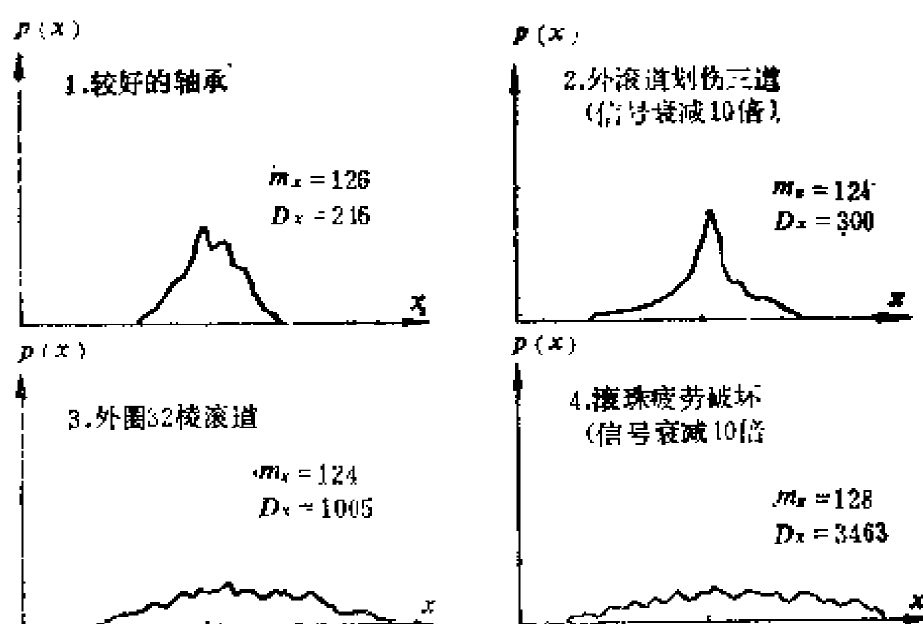


图 9-6-6

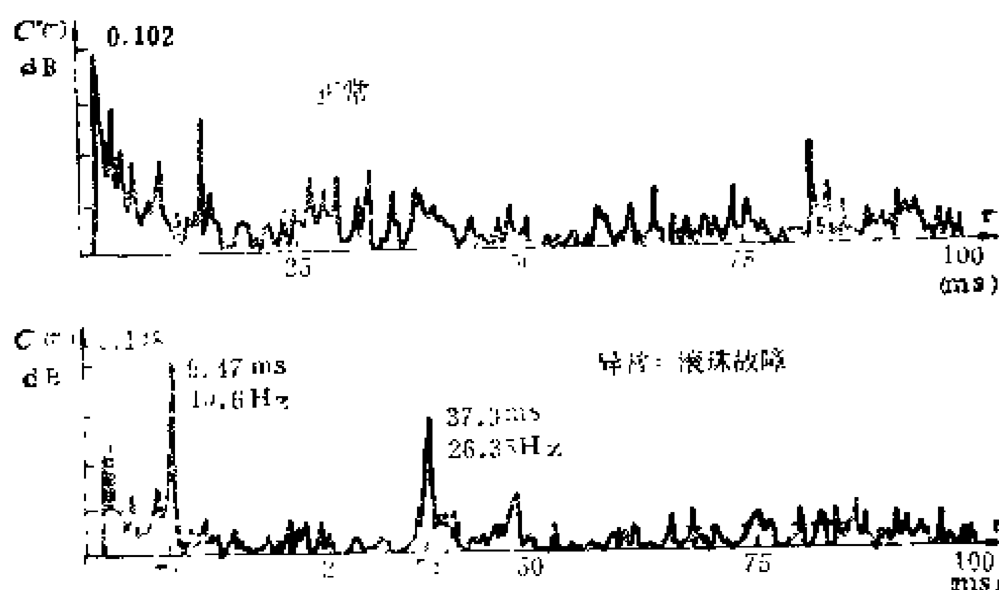


图 9-6-7

的故障，需要采集轴承振动信号。其测试原理及试验装置表示在图 9-6-5 上，从幅域信息概率密度函数（见图 9-6-6）可以识别各种故障，也可以从倒频谱图上识别轴承是否出现了故障（图 9-6-7）。

（3）滑动轴承故障

一般在大中型舰船的发动机、机车轮轴、轧钢机等高负荷低转速的机械中用滑动轴承较多。其主要故障是磨损和松动。由于轴系不平衡、不对中以及轴承本身安装不好，可导致轴承的承压不均匀，油膜破裂等。

滑动轴承的磨损是由运动表面的相对摩擦造成的。摩擦激发一种噪声，在含有摩擦噪声的轴承的频域信息中，其量值在整个频带上都有提高，且与摩擦严重的程度成正比。此外，轴承的摩擦、松动与轴系不平衡、不对中和弯曲变形有关，因而在频域信息上出现工频的一阶、二阶以至于更高阶的分量。

(4) 齿轮的故障

引起齿轮故障的因素很多，例如加工精度低、安装质量差、联轴节不平衡不对中、润滑油不清洁、选型不当等等。另外齿轮系统的扭振会引起牙齿的冲击，从而加剧齿轮磨损甚至使牙齿折断。

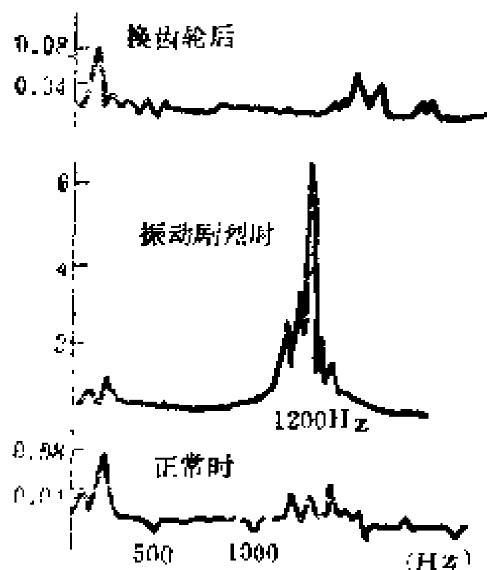


图 9-6-8

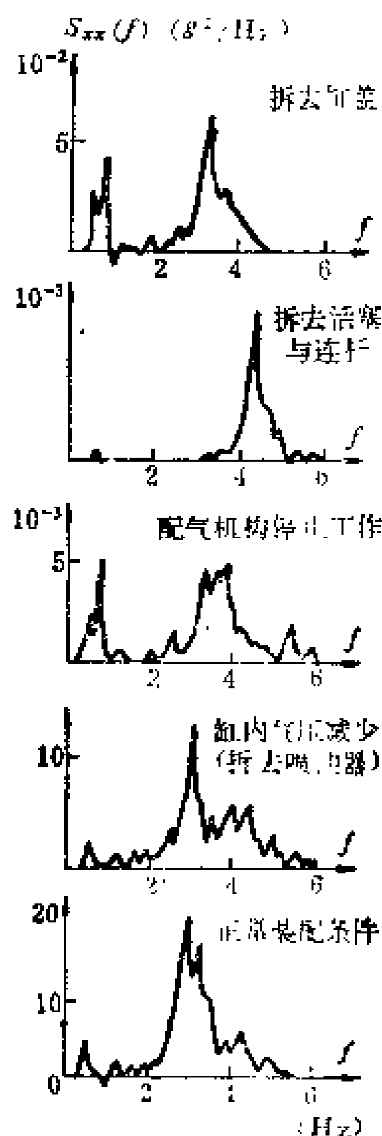


图 9-6-9

当齿轮啮合变坏时，就会在振动或噪声频谱图上高频段的啮合频率 f_m 处出现较高的峰值。这里

$$f_m = f_0 \times 齿数,$$

式中 f_0 即前文提到过的转频。

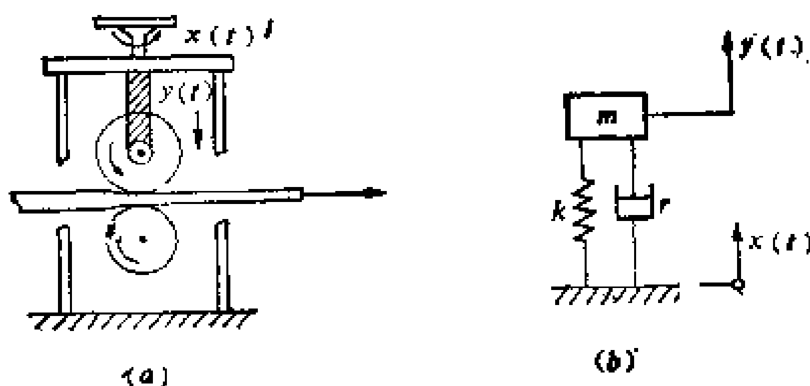
也可能发生这样的情况：齿轮损坏时，f_m 及工作频率处振动分量的幅值变化不大，但出现很大的齿轮共振频率，如图 9-6-8 所示。

以上介绍了几种常用零件的故障诊断，更进一步可对组件、整机进行故障诊断，不过情况更错综复杂而已，原理也是利用对各部位振动信号以及各域信息的分析。例如图 9-6-9 所示为某发动机某测点的加速度自谱：当发动机因各种原因不能正常工作时，其自谱均明显地有各种不同的变化。

故障诊断是一项细致的工作，信号的采集、处理、分析与判断，需要一个探索、验证和积累经验的过程。由于它的意义重大，目前正日益引起工程界的浓厚兴趣。

第九章习题

习题 9-1 某连续薄板轧钢机的轧辊间隙调节系统及其最简单的单自由度简化模型，分别如习题图 9-1(a)，(b)所示，图中 m，r、k 分别为当量质量、当量阻尼和当量刚度。若厚薄控制调节盘的输入位移 $x(t)=A\sin\omega t$，求轧辊输出位移 $y(t)$ 的滞后时间及系统粘性阻尼系数 r；若输入 $x(t)$ 为



习题图 9-1

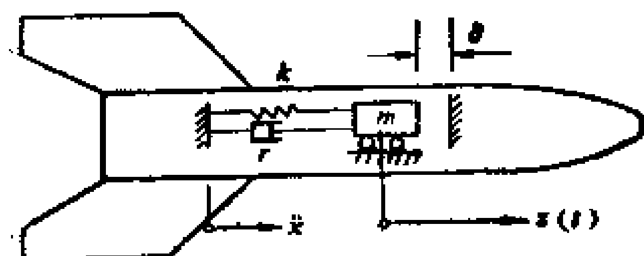
一阶跃函数，即

$$x(t)=\begin{cases}B & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0)。\end{cases}$$

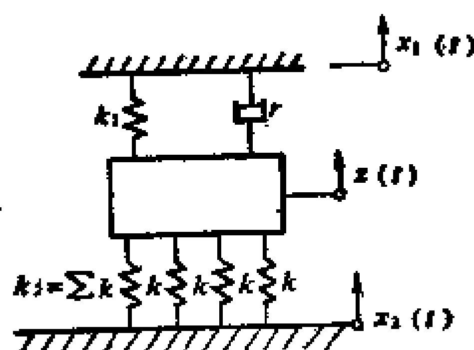
求输出 $y(t)$的滞后时间。

答案：$t_0=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_c}\left(\frac{\pi}{2}-tg^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$。

习题 9-2　设某火箭中有一部件可简化为单自由度系统，如习题 9-2



习题图 9-2



习题图 9-3

所示。该系统的无量纲阻尼因子 $\zeta=0.1$，固有效率 $f_0=25$ 赫，质量 m 与舱壁间隙 $\delta=7$ 毫米，该部件受火箭发动机腔壁水平加速度 $\ddot{x}$ 的随机激励，已知 $\ddot{x}(t)$ 服从正态分布，且为白噪声，单边加速度自谱为 $0.2(g^2/赫)$。试求部件与腔壁碰撞的概率。

答案：0.25%。

习题 9-3　某飞行器内悬置一仪器，在飞行器外壳上、下两面均有随机位移激励，已知激励都是平稳、正态、白噪声随机过程，即 $S_{x_1x_1}(\omega)=S_{x_2x_2}(\omega)=S_0$，又知 $x_1(t)=x_2(t+T)$，式中 T 为滞后时间，其互谱为 $S_{x_1x_2}(\omega)=S_0e^{-i\omega T}$，$S_{x_2x_1}(\omega)=S_0e^{i\omega T}$。振动系统的简化模型如习题图 9-3 所示，求仪器的绝对加速度响应谱。

答案：

$$S_{\ddot{z}\ddot{z}}(\omega)=S_0\omega^4\left\{\frac{k_1^2+k_2^2-r^2\omega^2+2k_1k_2\cos\omega T-2k_2r\omega\sin\omega T}{(k_1+k_2)^2+r^2\omega^2}\right\}。$$

参 考 文 献

[1] M.G.贝克，地面车辆系统导论，机械工业出版社，1978。

[2] A. Λ. Силаев, Спектральная Теория Подрес-Сориэапия, Транс-портных Машин, 1972.
[3] T.Shimogo, Y.Ada, Seismic Response of a Flexible Rotor, Keic University, 1980.
[4] E.C.温特切勒，现代武器运筹学导论，周方等译，国防工业出版社，1979.
[5] 谷口修，振動工学ハレドブツク，養賢堂，1976。
[6] 徐敏等，相干分析与信号处理技术与故障诊断，上海科学技术出版社，1984。
[7] Ralph.A. Collacott, Vibration Monitoring and Diagnosis, Mc-Graw-Hill, 1979.
[8] B. Λ. Светликий, Случайные колебания механических систем, Машиностроение,1976.

附录 1 Z变换特性和Z变换表

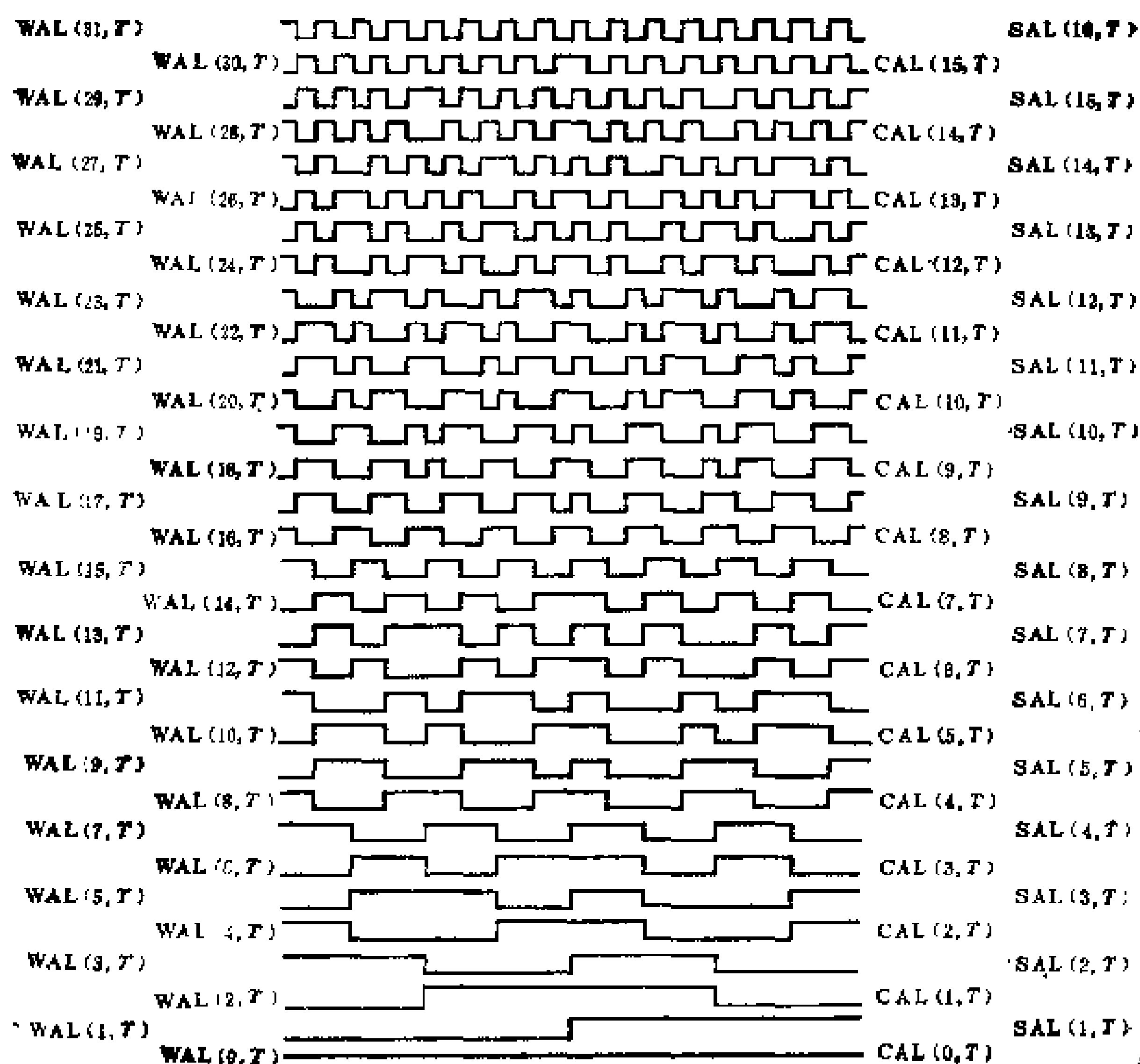
1. Z变换特性

$x(t)$ 或 $x(k)$	$\mathscr{Z}[x(t)]$ 或 $\mathscr{Z}[x(k)]$
$ax(t)$	$aX(z)$
$x_1(t)+x_2(t)$	$X_1(z)+X_2(z)$
$x(t+T)$ 或 $x(k+1)$	$zX(z)-zx(0)$
$x(t+2T)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$
$x(k+2)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$
$x(t+kT)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\cdots-zx(kT-T)$
$x(k+m)$	$z^mX(z)-z^mx(0)-z^{m-1}x(1)-\cdots-zx(m-1)$
$tx(t)$	$-Tz\frac{d}{dz}[X(z)]$
$kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}[X(z)]$
$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
$ka^kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}\left[X\left(\frac{z}{a}\right)\right]$
$x(0)$	$\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$ 如果有极限
$x(\infty)$	$\lim\limits_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$ $\left[\frac{z-1}{z}X(z)\right.$ 在单位圆上和单位圆外是解析的$\left.\right]$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}x(k)$	$X(1)$
$\sum\limits_{k=0}^{n}x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$

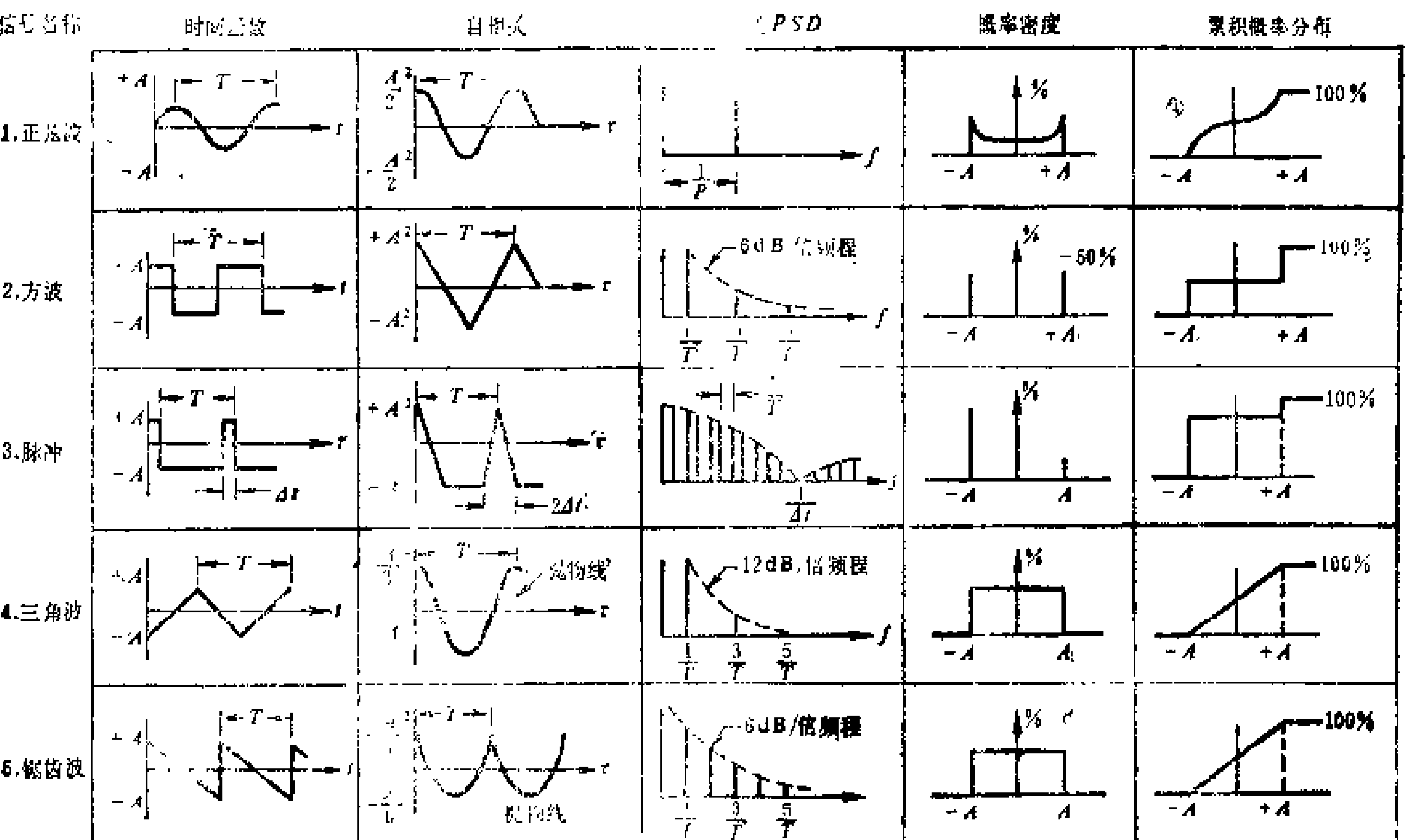
2. Z 变换表

$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)=\mathscr{Z}[x(t)]=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$t\cdot e^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

附录 2 按序数排列的一组沃尔什函数



附录 3 典型信号的自相关函数、自功率谱密度、概率密度函数和累积概率分布函数的示意图



6.[illegible]斯[illegible]		τ	f	$-A_{rms}$ $+$[illegible]	100% $-$ $+$
7.有限带宽噪声	A_{rms} t	$-\tau$ τ	BW f	%	100% $-$ $+$
8.正弦波加随机噪声	$+A$ T $-A$ t	T $-\tau$ τ	$\frac{1}{T}$ f	% $-A$ $+A$	100% $-A$ $+A$
9.伪随机二进制序列噪声	Δt $+A$ $-A$ 周期 ($N\cdot\Delta t$) t	$2\Delta t$ $N\Delta t$ τ	$\frac{1}{N}\Delta t$ $\frac{1}{\Delta t}$ $\frac{2}{\Delta t}$ f	% $-A$ $+A$	100% $-A$ $+A$
10.伪随机[illegible]进制[illegible]噪声均匀分布	Δt $+A$ 周期 ($N\cdot\Delta t$)	$2\Delta t\log_2 N$ $N\Delta t$ $N\Delta t$ τ	$\frac{1}{N}\Delta t$ $\frac{2}{\Delta t\log_2 N}$ f	% $-A$ $+A$	100% $-A$ $+A$

附录 4　累积概率值和安全概率值

1．累积概率值

$$P(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

z	±1	±1.96	±2	±3	±4	±4.5	±5.0
$P(z)$%	68.27	95.0	95.54	99.73	99.997	99.999	99.99999

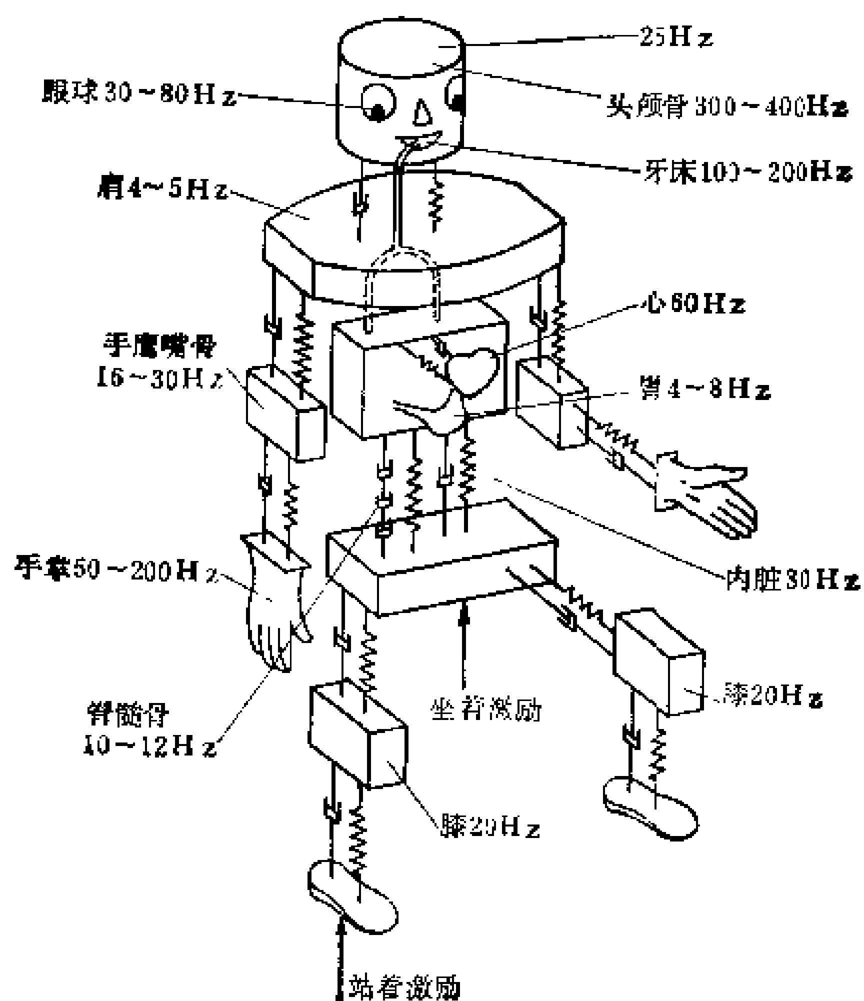
2．安全概率值与失效概率

$u=\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}$	0.00	0.50	1.00	1.28	1.65	2.06	2.33
P 失效	0.5000	0.3085	0.1569	0.1000	0.050	0.0228	0.010
P 安全	0.5000	0.6915	0.8431	0.9000	0.9500	0.9772	0.990
$u=\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}$	3.00	3.09	3.72	4.25	4.75	5.20	5.60
P 失效	0.0013	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.0000001	0.00000001
P 安全	0.9987	0.999	0.9999	0.99999	0.999999	0.9999999	0.99999999

表中 $\mu_Y=\mu_f-\mu_w$，$\sigma_Y=\sqrt{\sigma_{ff}^2+\sigma_{ww}^2}$；其中 μ_f 和 μ_w 分别为强度 σ_f 和工作应力 σ_w 的数学期望，σ_{ff} 和 σ_{ww} 分特为 σ_f 和 σ_w 的标准离差．由于 $Y=\sigma_f-\sigma_w$．所以 Y 也服从正态分布。

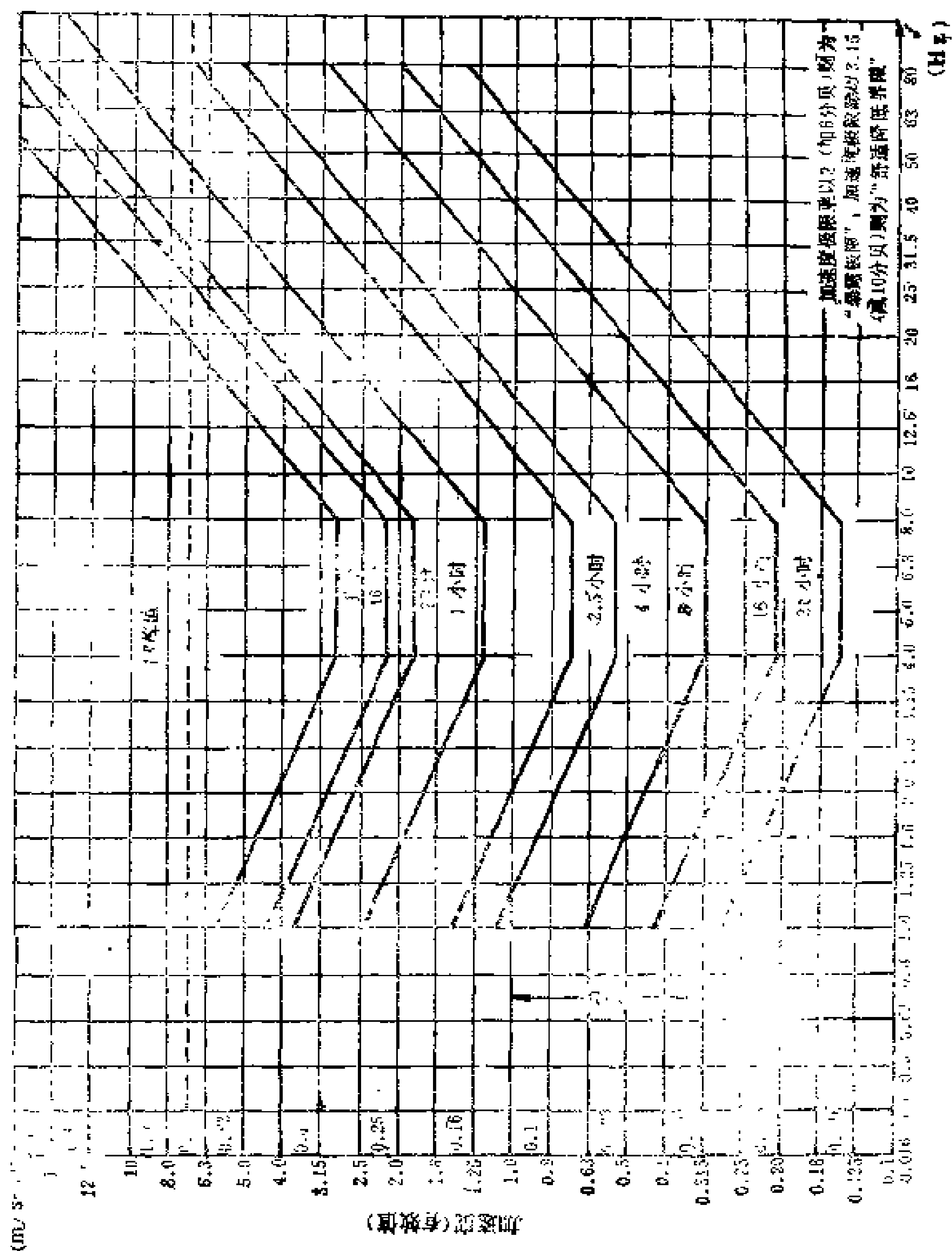
我们把 $u=\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}=\frac{\mu_f-\mu_w}{\sqrt{\sigma_{ff}^2+\sigma_{ww}^2}}$ 叫做联结方程，它是联结强度、应力和概率三个参数的关系式，是可靠性设计的重要公式。

附录 5　人体的机械振动模型及各部分的固有频率

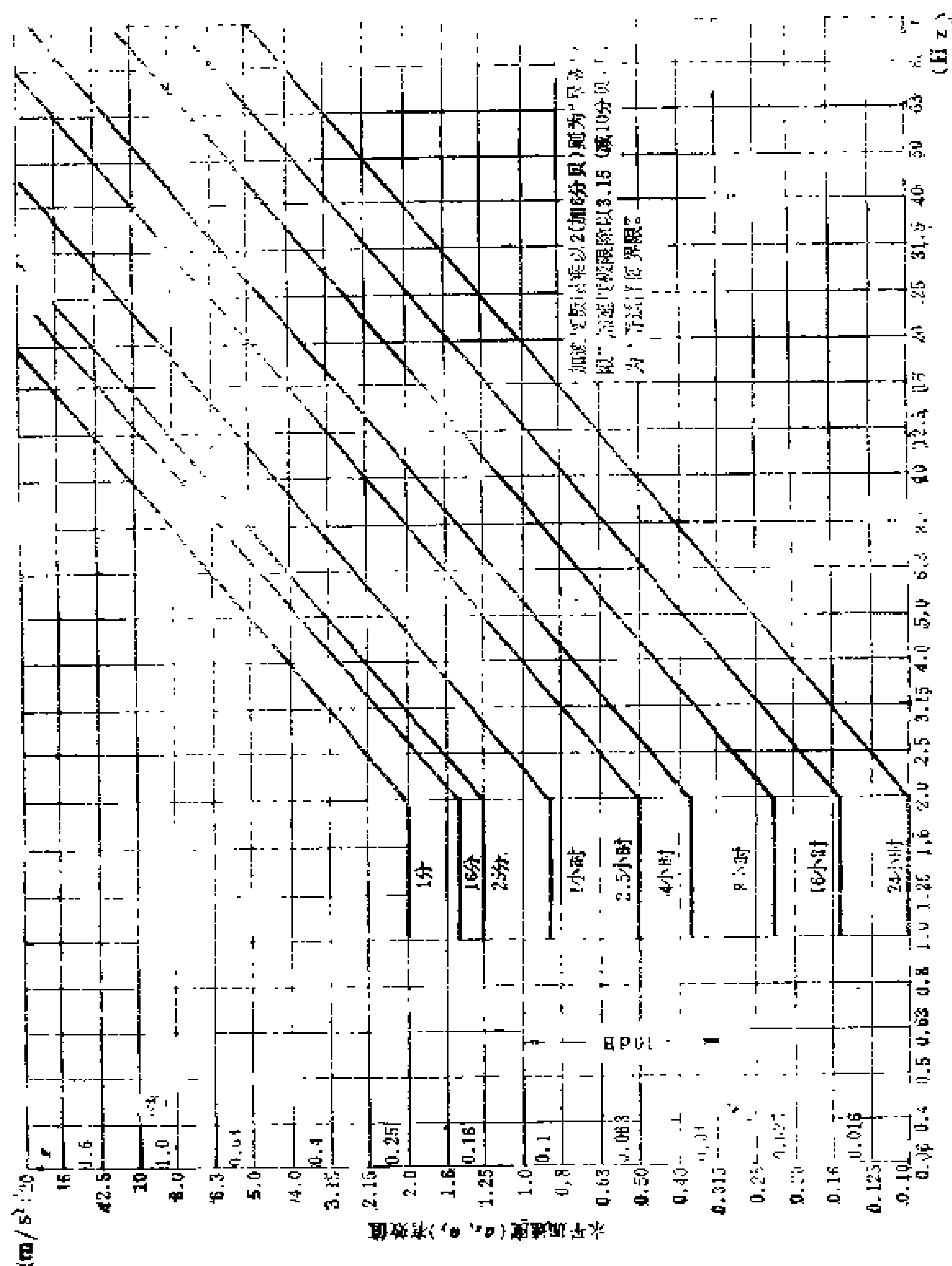


附录 6　人体感受曲线

1. 纵向加速度极限和暴露时间的关系



C. 水平加速度(a_x, a_y)极限与频率和暴露时间的关系



附录 7 单自由度系统的增益因子 $|H(\omega)|$

响应形式 \ 激励形式		基础运动激励			力激励
		位移$x(t)$	速度$\dot{x}(t)$	加速度$\ddot{x}(t)$	力$x(t)$(位移单位)$=F(t)/k$
位移响应	绝对位移 $z(t)$	$\frac{D}{B}$	$\frac{D}{\omega B}$	$\frac{D}{\omega^2 B}$	$\frac{1}{B}$
	相对位移 $y(t)=z(t)-x(t)$	$\frac{\omega^2}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega}{\omega_0^2 B}$	$\frac{1}{\omega_0^2 B}$	$\frac{1}{B}$
速度响应	绝对速度 $\dot{z}(t)$	$\frac{\omega D}{B}$	$\frac{D}{B}$	$\frac{D}{\omega B}$	$\frac{\omega}{B}$
	相对速度 $\dot{y}(t)=\dot{z}(t)-\dot{x}(t)$	$\frac{\omega^3}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega^2}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega}{B}$
加速度响应	绝对加速度 $\ddot{z}(t)$	$\frac{\omega^2 D}{B}$	$\frac{\omega D}{B}$	$\frac{D}{B}$	$\frac{\omega^2}{B}$
	相对加速度 $\ddot{y}(t)=\ddot{z}(t)-\ddot{x}(t)$	$\frac{\omega^4}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega^3}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega^2}{\omega_0^2 B}$	$\frac{\omega^2}{B}$

$$D=\sqrt{\omega_0^4+4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}/\omega_0^2,\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$B=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}/\omega_0^2,\quad \zeta=\frac{r}{2\sqrt{km}}.$$

附录 8 詹姆斯公式表

对于广义积分

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}|H_n(\omega)|^2 d\omega,$$

其中

$$H_n(\omega)=\left\{\frac{B_0+(i\omega)B_1+(i\omega)^2B_2-\cdots(i\omega)^{n-1}B_{n-1}}{A_0+(i\omega)A_1+(i\omega)^2(i\omega)^2A_2+\cdots+(i\omega)^nA_n}\right\},$$

仅当其特征方程

$$A_0 + i\omega A_1 + (i\omega)^2 A_2 + \cdots + (i\omega)^n A_n = 0$$

的各个根都位于 ω 平面的上半部时，积分才是收敛的。此时积分值如下：

当 $n=1$ 时，$\quad H_1(\omega) = \dfrac{B_0}{A_0 + i\omega A_1}$，

$$I_1 = \frac{\pi B_0^2}{A_0 A_1}.$$

当 $n=2$ 时，$\quad H_2(\omega) = \dfrac{B_0 + i\omega B_1}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2}$，

$$I_2 = \frac{\pi\{A_0 B_1^2 + A_2 B_0^2\}}{A_0 A_1 A_2}.$$

当 $n=3$ 时，$\quad H_3(\omega) = \dfrac{B_0 + i\omega B_1 - \omega^2 B_2}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - i\omega^3 A_3}$，

$$I_3 = \frac{\pi\{A_0 A_3(2B_0 B_2 - B_1^2) - A_0 A_1 B_2^2 - A_2 A_3 B_0^2\}}{A_0 A_3(A_0 A_3 - A_1 A_2)}.$$

当 $n=4$ 时，

$$H_4(\omega) = \frac{B_0 + i\omega B_1 - \omega^2 B_2 - i\omega^3 B_3}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - i\omega^3 A_3 + \omega^4 A_4},$$

$$I_4 = \frac{M_4}{N_4},$$

式中 $M_4 = \pi\{A_0 B_3^2(A_0 A_3 - A_1 A_2) + A_0 A_1 A_4(2B_1 B_3 - B_2^2) -$

$\qquad - A_0 A_3 A_4(B_1^2 - 2B_0 B_2) + A_4 B_0^2(A_1 A_4 - A_2 A_3)\}$，

$$N_4 = A_0 A_4(A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3).$$

当 $n=5$ 时，

$$H_5(\omega) = \frac{B_0 + i\omega B_1 - \omega^2 B_2 - i\omega^3 B_3 + \omega^4 B_4}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - i\omega^3 A_3 + \omega^4 A_4 + i\omega^5 A_5},$$

$$I_5 = \frac{M_5}{N_5}.$$

式中 $M_5 = \pi\{A_0 B_4^2 (A_0 A_3^2 + A_1^2 A_4 - A_0 A_1 A_5 - A_1 A_2 A_3) +$

$+ A_0 A_5 (2B_2 B_4 - B_3^2)(A_1 A_2 - A_0 A_3) +$

$+ A_0 A_5 (2B_0 B_4 - 2B_1 B_3 + B_2^2)(A_0 A_5 - A_1 A_4) +$

$+ A_0 A_5 (2B_0 B_2 - B_1^2)(A_3 A_4 - A_2 A_5) + A_5 B_0^2 (A_1 A_4^2 +$

$+ A_3^2 A_4 - A_0^2 A_4 A_5 - A_2 A_3 A_4)\}.$

$N_5 = A_0 A_5 (A_0^2 A_5^2 - 2A_0 A_1 A_4 A_5 - A_0 A_2 A_3 A_5 -$

$+ A_1 A_2^2 A_5 + A_1^2 A_4^2 + A_0 A_3^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 A_4).$